Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Казанский национальный исследовательский
технологический университет

Н. В. Лежнева

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ ТЕХНИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ И НЕРЕЗЕРВИРОВАННЫХ СИСТЕМ

Учебно-методическое пособие

ISBN 978-5-7882-3599-8

УДК 658.5.011.56(075)
ББК 32.965я7
Л40

*Издается по решению редакционно-издательского совета
Казанского национального исследовательского технологического университета*

Рецензенты:
канд. техн. наук В. В. Гетман
канд. техн. наук А. В. Долганов

Лежнева Н. В.
Л40 Определение показателей надежности технических элементов и нерезервированных систем : учебно-методическое пособие / Н. В. Лежнева; Минобрнауки России, Казан. нац. исслед. технол. ун-т. – Казань : Изд-во КНИТУ, 2025.

ISBN 978-5-7882-3599-8

Представлены основные теоретические сведения по показателям надежности технических элементов и нерезервированных систем, а также методы решения прикладных задач.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки «Автоматизация технологических процессов и производств», «Информатика и вычислительная техника», «Управление в технических системах», при изучении дисциплин «Надежность, эргономика и качество АСОИУ», «Надежность, эргономика и качество систем управления», «Диагностика и надежность автоматизированных систем».

Подготовлено на кафедре информационных систем и технологий Нижнекамского химико-технологического института.

УДК 658.5.011.56(075)
ББК 32.965я7

Минимальные системные требования:
- Windows: процессор Intel 1,3 Гц или аналогичный;
  Microsoft Windows XP Service Pack 2
  128 МБ оперативной памяти
- MacOS: процессор PowerPC G4 или Intel
  MacOS X 10.5
  128 МБ оперативной памяти
- Linux: 32-разрядный процессор Intel Pentium или аналогичный
  SUSE Linux Enterprise Desktop 10 или Ubuntu 7.10; GNOME или KDE Desktop Enviroment

---

Наталья Викторовна Лежнева

Редактор А. Н. Егоров

Подписано к использованию 24.11.2025

Объем издания 7,4 Мб Заказ 72/25

Издательство Казанского национального исследовательского
технологического университета

420015, г. Казань, К. Маркса, 68

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

К важнейшим показателям качества объектов относится надежность. Надежность в узком смысле представляет собой свойство объекта сохранять работоспособность в течение заданного интервала времени.

В теории надежности все технические объекты подразделяются на элементы и системы. В зависимости от цели исследования один и тот же объект может рассматриваться как система или как элемент. Под системой понимают совокупность элементов, взаимодействующих между собой в процессе выполнения заданных функций. Элементом системы называют любой объект, внутренняя структура которого на данном этапе анализа надежности не учитывается, т. е. он рассматривается как единое и неделимое целое («черный ящик»). Понятия «элемент» и «система» выражаются друг через друга и относительны, поскольку то, что является системой для одних задач, для других выступает в качестве элемента, и наоборот.

Непрерывный рост требований к современной технике, резкое увеличение сложности систем, а также выполняемых ими функций, расширение условий их эксплуатации обусловили необходимость разработки научных основ надежности технических систем. Вопросам обеспечения надежности уделяется значительное внимание на всех этапах жизненного цикла технических систем: при проектировании, изготовлении и эксплуатации. Без постановки и проведения специальных работ по обеспечению надежности сложные системы недостаточно эффективны и безопасны.

Данное пособие предназначено для изучения основных теоретических сведений по показателям надежности технических элементов и нерезервированных систем, приобретения практических навыков их определения, а также содержит задания для закрепления теоретических знаний. В пособии на конкретных примерах рассмотрено определение показателей надежности и предложены задачи для самостоятельного решения обучающимися. Приведены справочные материалы, необходимые для выполнения расчетов надежности.

Пособие состоит из двух частей. В первой части рассматриваются основные понятия теории надежности, единичные и комплексные показатели надежности технических элементов, законы распределения, используемые в моделях безотказности и восстанавливаемости. Вторая часть посвящена надежности нерезервированных систем; в ней представлены основные расчетные формулы для системных показателей надежности, структурные методы решения двух типовых задач, возникающих при исследовании надежности нерезервированных систем.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЕДИНИЧНЫХ И КОМПЛЕКСНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ ТЕХНИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ

1.1. Методические указания по теоретической части

Надежность – свойство объекта сохранять во времени в установленных пределах значения всех параметров, характеризующих его способность выполнять требуемые функции в заданных режимах и условиях применения, технического обслуживания, хранения и транспортирования.

Надежность как комплексное свойство включает в себя следующие единичные свойства: безотказность, ремонтопригодность, сохраняемость, долговечность.

Безотказность – свойство объекта непрерывно сохранять работоспособность (выполнять свои функции с эксплуатационными показателями не хуже заданных) в течение требуемого интервала времени.

Ремонтопригодность – свойство объекта, заключающееся в его приспособленности к поддержанию и восстановлению работоспособного состояния путем технического обслуживания и ремонта.

Долговечность – свойство объекта сохранять работоспособность до наступления предельного состояния при установленной системе технического обслуживания и ремонта. Предельное состояние – состояние, при котором дальнейшая эксплуатация или восстановление объекта недопустимы или нецелесообразны вследствие физического старения (износа).

Сохраняемость – свойство объекта сохранять в заданных пределах значения показателей, характеризующих способность выполнять требуемые функции при хранении и транспортировке.

Безотказность характеризуется техническим состоянием объекта. Работоспособным считается такое состояние объекта, при котором значение всех параметров, характеризующих способность выполнять заданные функции, соответствует требованиям нормативно-технической и/или конструкторской (проектной) документации. Неработоспособным является такое состояние объекта, при котором значение хотя бы одного параметра не соответствует требованиям указанной документации. Переход объекта из работоспособного в неработоспособное состояние означает отказ. Восстановление – событие, заключающееся в переходе объекта из неработоспособного в работоспособное состояние.

Отказы классифицируются по различным признакам. В зависимости от скорости изменения параметров объекта до момента возникновения отказа различают внезапные и постепенные отказы. *Внезапный отказ* – отказ, возникающий неожиданно и характеризующийся скачкообразным изменением одного или нескольких параметров объекта. Анализ $y_i(t)$ не позволяет прогнозировать отказ (рис. 1.1). Причинами внезапных отказов являются обрывы, короткие замыкания, механические поломки.

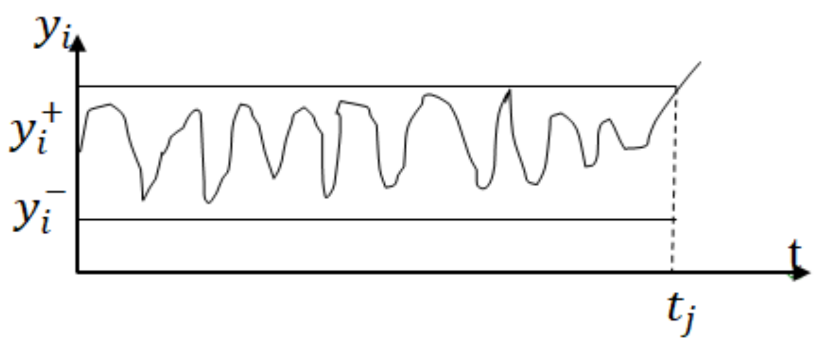

Рис. 1.1. Пример внезапного отказа

Постепенный отказ – отказ, возникающий в результате постепенного изменения одного или нескольких параметров объекта. При постепенном отказе характер изменения координаты $y_i(t)$ позволяет прогнозировать момент отказа (рис. 1.2).

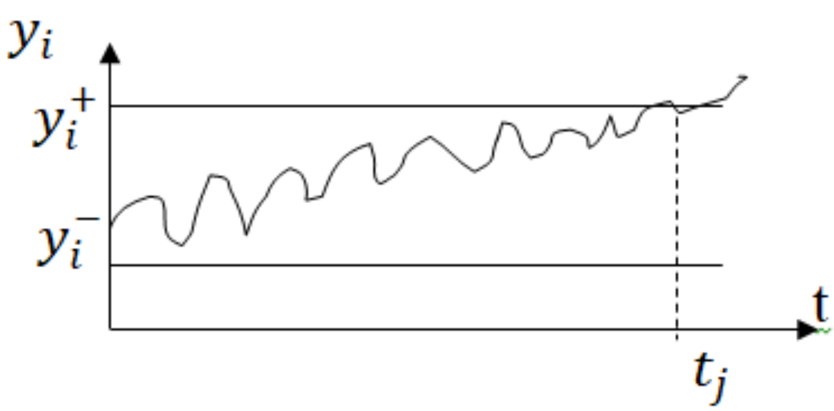

Рис. 1.2. Пример постепенного отказа

По характеру устранения различают устойчивые, самоустраняющиеся и перемежающиеся отказы. *Устойчивые отказы* не исчезают самопроизвольно; после устойчивого отказа необходимо проведение ремонта или замена элемента. *Самоустраняющиеся отказы (сбои)* самопроизвольно устраняются без вмешательства оператора в результате естественного возврата объекта в работоспособное состояние; их длительность мала, а негативные последствия несущественны. *Перемежающийся отказ* – многократно возникающий самоустраняющийся отказ одного и того же характера; для его устранения обычно необходимо вмешательство оператора.

По характеру проявления различают явные и скрытые отказы. *Явные отказы* выявляются визуально или методами и средствами контроля и диагностирования. *Скрытые отказы* обнаруживаются при техническом обслуживании или специальными методами диагностирования.

По характеру взаимосвязи отказы подразделяются на зависимые и независимые. *Зависимые отказы* нескольких элементов обусловлены одной причиной. *Независимые отказы* нескольких элементов вызваны различными причинами, при этом вероятность одновременных отказов пренебрежимо мала.

Для электротехнических элементов (например, резисторов, полупроводниковых диодов, транзисторов, реле и т. д.) могут возникать два типа отказов: обрыв и короткое замыкание. При *обрыве* снижается до нуля проводимость, а при *коротком замыкании* – сопротивление. Обрыв является наиболее распространенным видом отказа электротехнических элементов и систем. В частности, для технических средств автоматизации доля отказов типа «обрыв» составляет 70–80 %. Хотя отказы типа «короткое замыкание» наблюдаются существенно реже, они более опасны для других элементов электротехнических систем, поскольку значительно изменяют режим их работы.

По возможности восстановления различают восстанавливаемые и невосстанавливаемые отказы. *Восстанавливаемые отказы* допускают проведение ремонта элемента, причем данный ремонт экономически выгоднее приобретения нового элемента. *Невосстанавливаемые отказы* вызывают полное разрушение элемента, и ремонт отказавшего элемента нецелесообразен по экономическим соображениям.

При наличии нескольких уровней работоспособности различают полные и частичные отказы. При *полном отказе* объект прекращает выполнять все заданные функции. При *частичном отказе* объект не может выполнять одну или более возложенных на него функций, а остальные могут выполняться.

В зависимости от причины возникновения отказы подразделяются на конструкционные, производственные и эксплуатационные. *Конструкционные отказы* возникают в результате несовершенства и нарушения правил и/или норм проектирования и конструирования объекта. *Производственные отказы* обусловлены несовершенством или нарушением технологического процесса изготовления, монтажа, наладки или ремонта, если он выполнялся на ремонтном предприятии. *Эксплуатационные отказы* возникают в результате нарушения установленных правил и/или условий эксплуатации.

Надежность технических элементов и систем характеризуется функциональными и числовыми показателями. Различают единичные и комплексные показатели надежности. К единичным относятся показатели безотказности, ремонтопригодности, долговечности и сохраняемости. Комплексные показатели характеризуют несколько единичных свойств, например безотказность и ремонтопригодность. Для технических средств автоматизации показатели долговечности и сохраняемости неактуальны и далее не рассматриваются.

Различают восстанавливаемые и невосстанавливаемые элементы. Невосстанавливаемыми являются такие изделия, восстановление которых непосредственно после отказа считается нецелесообразным или невозможным. Большинство изделий, применяемых для автоматизации технологических процессов, являются восстанавливаемыми. Невосстанавливаемыми считаются такие элементы, как конденсаторы, резисторы, интегральные схемы и т. п.

Выполнение расчетов надежности осуществляют на основе математических моделей надежности изделий. Модель надежности невосстанавливаемого элемента является наиболее простой, поскольку представляет собой модель безотказности. Модель надежности восстанавливаемого элемента включает модель безотказности, модель восстанавливаемости, модель контроля и диагностирования.

К функциональным показателям безотказности относятся:

1. *Вероятность отказа (функция ненадежности)* – вероятность того, что при заданных условиях эксплуатации в течение заданной наработки произойдет хотя бы один отказ:

$$Q(t) = P\{T < t\}, t \geq 0,$$

где T – время безотказной работы элемента.

Кроме вероятностного определения $Q(t)$, существует статистическое определение, получаемое по статистическим данным об отказах. Статистическая функция ненадежности:

$$\hat{Q}(t) = \frac{N - N(t)}{N},$$

где N – количество испытываемых изделий; $N(t)$ – количество работоспособных изделий в момент времени t.

2. *Вероятность безотказной работы (функция надежности)* – вероятность того, что изделие работоспособно в течение заданной наработки при заданных условиях эксплуатации:

$$P(t) = P\{T > t\}, t \geq 0.$$

Статистическая функция надежности:

$$\hat{P}(t) = \frac{N(t)}{N}.$$

3. *Плотность распределения времени безотказной работы:*

$$f(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = -\frac{dP(t)}{dt}, \quad \int_0^\infty f(t)dt = 1,$$

$$P(t) = \int_t^\infty f(\tau)d\tau, \quad Q(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau.$$

Статистическая плотность распределения:

$$\hat{f}(t) = \frac{\Delta N/\Delta t}{N},$$

где t – середина малого интервала времени Δt; ΔN – число отказов на интервале Δt.

4. *Интенсивность отказов* – условная плотность распределения наработки до отказа в момент t при условии, что до этого момента отказы не возникали:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)} = -\frac{P'(t)}{P(t)} = -\big(\ln P\,(t)\big)',$$

$$P(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(\tau)d\tau\right), \quad Q(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda(\tau)d\tau\right),$$

$$f(t) = \lambda(t)\exp\left(-\int_0^t \lambda(\tau)d\tau\right).$$

Статистическая интенсивность отказов:

$$\hat{\lambda}(t) = \frac{\Delta N/\Delta t}{N(t)}.$$

Статистические данные по надежности технических элементов свидетельствуют о том, что типичная зависимость интенсивности отказов от времени имеет U-образный характер (рис. 1.3).

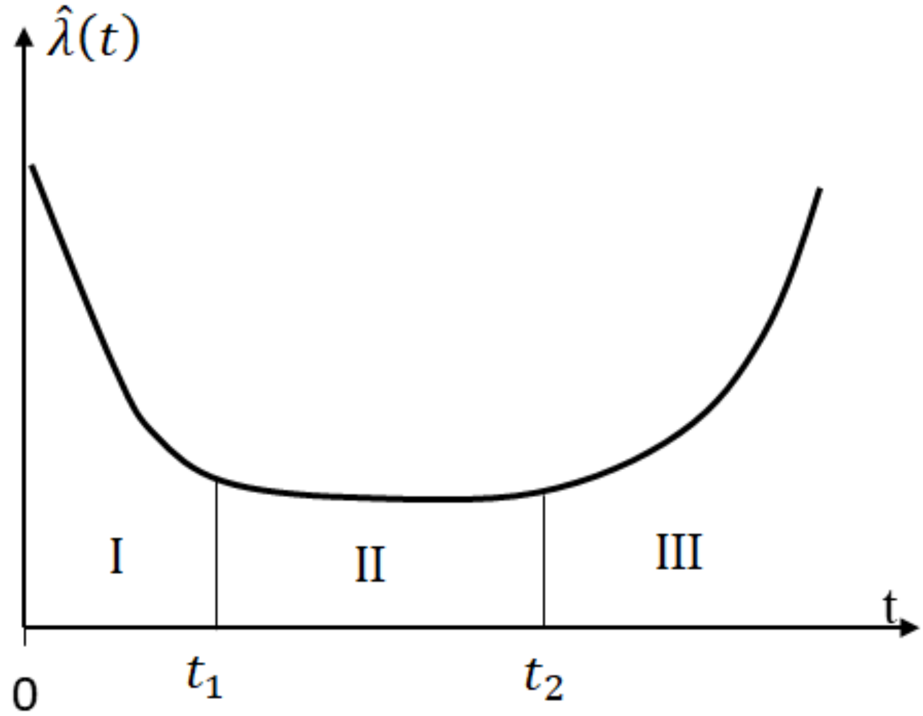

Рис. 1.3. Типичная статистическая интенсивность отказов элементов

На графике можно выделить три характерных участка:

I – период приработки $[0, t_1]$,

II – период нормальной эксплуатации $[t_1, t_2]$,

III – период старения $t > t_2$.

На периоде приработки наблюдается уменьшение интенсивности отказов. На этом этапе выявляются скрытые дефекты, не обнаруженные техническим контролем элементов.

Второй участок (период нормальной эксплуатации) характеризуется пониженным уровнем и примерным постоянством интенсивности отказов. Здесь отказы носят в основном внезапный характер из-за несоблюдения условий эксплуатации, случайных изменений нагрузки, неблагоприятных внешних факторов и т. п. Продолжительность этого периода зависит от срока службы элементов и от условий эксплуатации.

Период старения (физического износа) характеризуется резким возрастанием интенсивности отказов, что обусловлено необратимыми физико-химическими процессами.

К числовым показателям безотказности относятся:

1) *средняя наработка до отказа* – математическое ожидание случайной величины *T*:

$$t_\text{н} = M[T] = \int_0^\infty t \cdot f(t)dt = \int_0^\infty P(t)dt = \int_0^\infty \big(1 - P(t)\big)dt,$$

$$\mathrm{t}_\text{н} = \int_0^\infty \exp\left(-\int_0^t \lambda(\tau)d\tau\right)dt.$$

Оценка средней наработки до отказа определяется по экспериментальным значениям наработки до отказа $(t_j, j = 1, \dots, N)$:

$$\hat{t}_\text{н} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} t_j.$$

Значение $\hat{t}_\text{н}$ часто указывается в техническом паспорте элемента;

2) *дисперсия и среднеквадратическое отклонение наработки до отказа:*

$$\sigma^2 = D[T] = M[(T - t_{\text{н}})^2] = \int_0^\infty (t - t_{\text{н}})^2 \cdot f(t)dt,$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}.$$

Оценки дисперсии и среднеквадратического отклонения:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N}\left(t_j - \hat{t}_{\text{н}}\right)^2, \quad \hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}^2};$$

3) *гамма-ресурс*:

$$t_\gamma = \arg\left(P(t) \geq P_\gamma\right),$$

т. е. гамма-ресурс – это отрезок времени $[0, t_\gamma]$, на котором вероятность безотказной работы не ниже заданной величины P_γ (рис. 1.4):

$$P(t) \geq P_\gamma,$$

где P_γ – заданный (желаемый или гарантированный) уровень надежности.

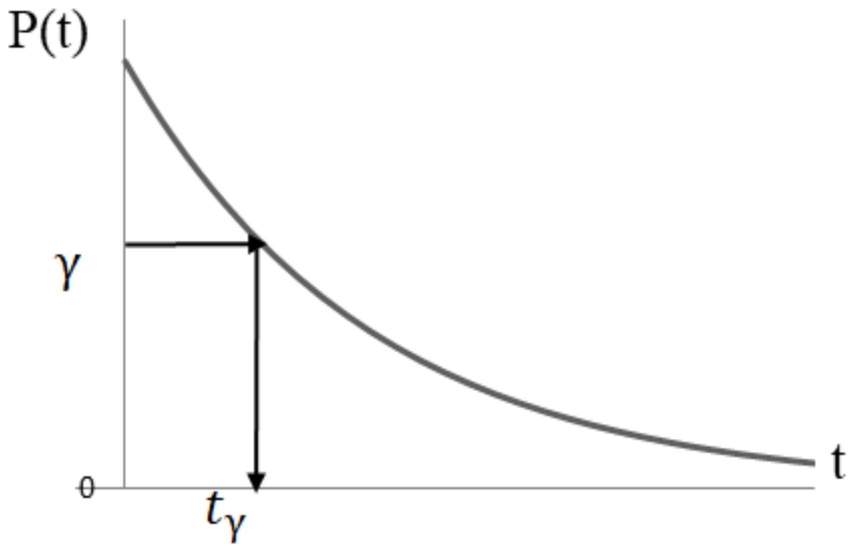

Рис. 1.4. Гамма-ресурс

Оценка гамма-ресурса $\hat{t}_\gamma$ определяется по статистической функции надежности $\hat{P}(t)$.

Для технических средств автоматизации, работающих в нормальных условиях эксплуатации, удовлетворительным считается гарантированный уровень надежности $P_\gamma = 0{,}9 \div 0{,}95$;

4) *вероятность безотказной работы элемента в характерные моменты времени* $t_h, h = 1, \dots, N$:

$$P(t_h) = P\{T \geq t_h\},$$

где, например, t_h = 1000, 2000, 4000, 8000… часов.

Непрерывная случайная величина T – наработка до отказа – может описываться различными законами распределения в зависимости от свойств системы и ее элементов, условий работы, характера отказов и т. д. Поведение наработки до отказа технических средств автоматизации удовлетворительно аппроксимируется следующими законами распределения:

а) экспоненциальное распределение:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad f(t) = \lambda e^{-\lambda t},$$

$$P(t) = e^{-\lambda t}, \quad Q(t) = 1 - e^{-\lambda t},$$

$$\lambda(t) = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda, \quad t_{\text{н}} = \int_0^\infty P(t)dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, dt = \frac{1}{\lambda},$$

$$\sigma^2 = \int_0^\infty (t - t_{\text{н}})^2 \cdot f(t)dt = \int_0^\infty \left(t - \frac{1}{\lambda}\right)^2 \cdot \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda^2},$$

где $\lambda >\ 0$ – параметр этого распределения.

Графики зависимостей функциональных показателей надежности от времени для экспоненциального распределения представлены на рис. 1.5.

Для экспоненциального распределения характерно, что условная вероятность безотказной работы элемента на интервале времени (t_1, t_2) при условии его работоспособности до момента t_1 зависит только от длительности этого интервала и не зависит от его расположения на оси времени (рис. 1.6):

$$P(t_1, t_2) = \frac{e^{-\lambda t_2}}{e^{-\lambda t_1}} = e^{-\lambda(t_2 - t_1)} = e^{-\lambda \Delta t}, \tag{1.1}$$

где $P(t_1, t_2)$ – вероятность безотказной работы элемента на интервале $\Delta t = t_2 - t_1$. Соотношение (1.1) является следствием свойства, которое называется отсутствием последействия. При наличии этого свойства показатели надежности элемента зависят только от его состояния в начале рассматриваемого интервала времени, но не зависят от того, сколько элемент проработал до этого интервала.

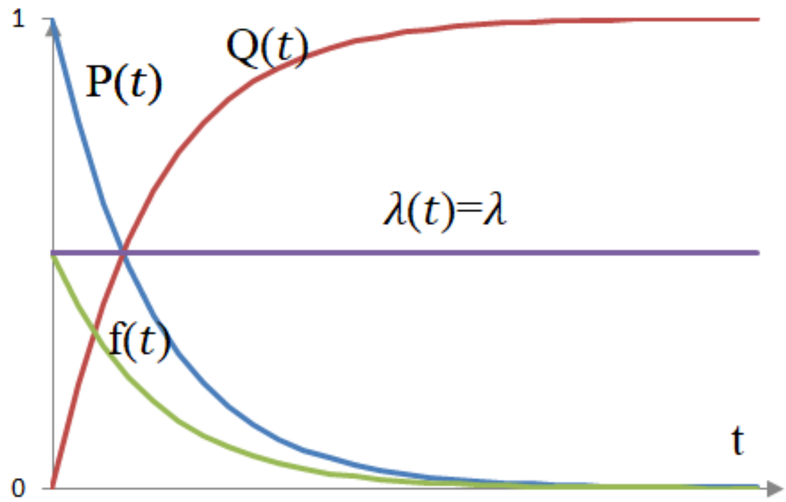

Рис. 1.5. Зависимости функциональных показателей надежности для экспоненциального распределения

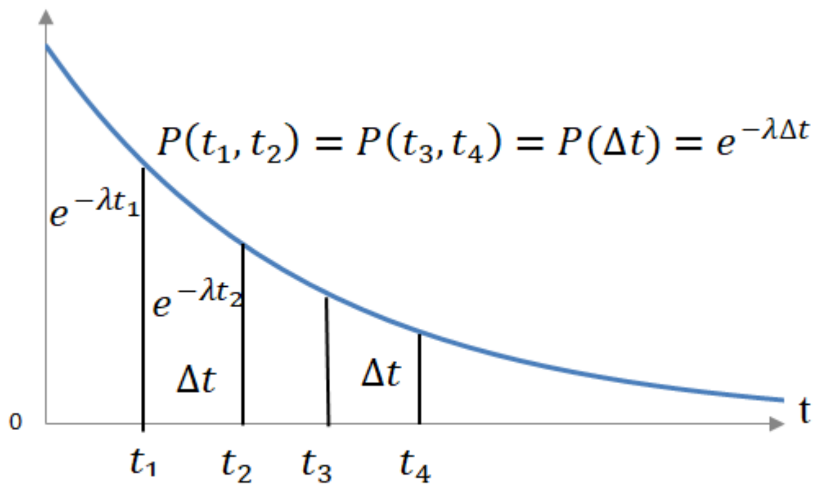

Рис. 1.6. Иллюстрация свойства экспоненциального распределения

Экспоненциальный закон распределения используется для описания надежности элемента в период его нормальной эксплуатации. Экспоненциальное распределение удовлетворительно описывает поведение наработки до внезапного отказа сложных элементов, которые состоят из большого числа K разнородных деталей с интенсивностями отказов $\lambda_j(t), j = 1,2,\ldots,K$, имеющими экстремумы в разные моменты времени $t_j, j = 1,2,\ldots,K$ (рис. 1.7). Примерами таких элементов являются электронные устройства, средства вычислительной техники, пневмоавтоматики и другие технические средства автоматизации.

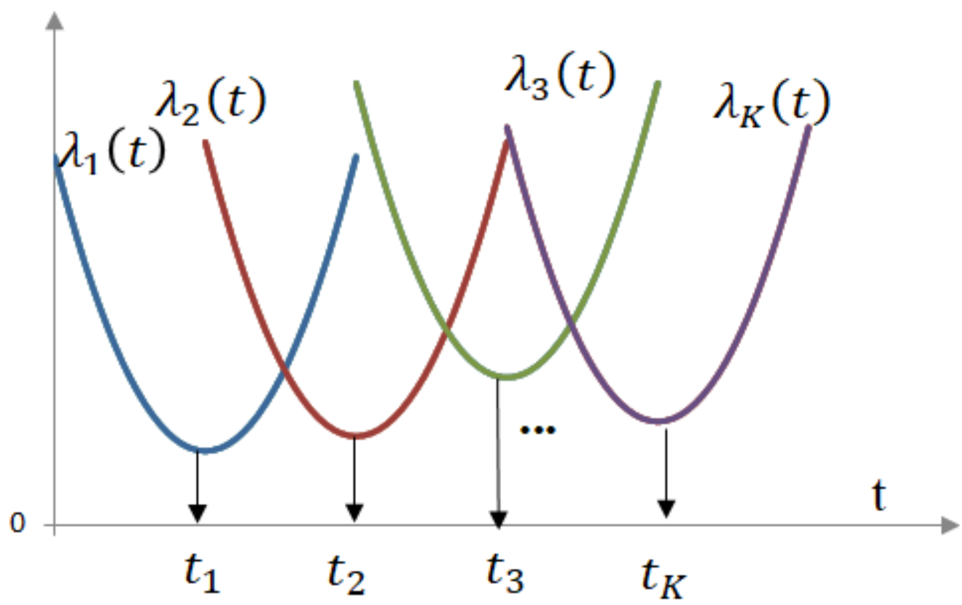

Рис. 1.7. Иллюстрация возможности применения экспоненциального распределения

Экспоненциальное распределение хорошо описывает надежность технических средств автоматизации, которые обладают малым периодом приработки элементов и почти не достигают периода старения из-за относительно быстрого морального износа и замены на более совершенные.

Экспоненциальное распределение наиболее часто применяют в расчетах надежности систем, состоящих из большого числа элементов с неизвестными характеристиками надежности;

б) *распределение Вейбулла:*

$$F(t) = 1 - e^{-(kt)^m}, \quad f(t) = mk(kt)^{m-1}e^{-(kt)^m},$$

$$P(t) = e^{-(kt)^m}, \quad Q(t) = 1 - e^{-(kt)^m}, \quad \lambda(t) = mk(kt)^{m-1},$$

$$t_{\text{н}} = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right)}{k}, \quad \sigma^2 = \frac{1}{k^2}\left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{m}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{m}\right)\right],$$

где k и m – параметры распределения; $\Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right)$ – гамма-функция:

$$\Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right) = \int_0^\infty t^{\frac{1}{m}} \cdot e^{-t} dt.$$

Табулированные значения гамма-функции приведены в прил. 1.

Параметр k определяет масштаб распределения, а параметр m – вид распределения. При $m = 1$ оно превращается в экспоненциальное, а при $m = 2$ – в распределение Релея. Обычно значения параметра $0{,}5 \leq m \leq 2{,}5$. Зависимости функциональных показателей надежности для распределения Вейбулла при трех значениях параметра $m = 0{,}5;\ 1;\ 2$ приведены на рис. 1.8.

Распределение Вейбулла используется на участках приработки (при $m < 1$), нормальной эксплуатации (при $m = 1$) и старения (при $m > 1$). Данное распределение со значением параметра $0{,}5 \leq m \leq 2{,}5$ широко применяется для описания поведения наработки до отказа многих сложных радиоэлектронных устройств, которые состоят из большого количества однородных элементов с монотонными функциями интенсивности отказов;

в) *нормальное распределение:*

$$F(t) = 1 - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} \exp\left(-\frac{(\tau - t_{\text{н}})^2}{2\sigma^2}\right) d\tau,$$

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t - t_{\text{н}})^2}{2\sigma^2}\right),$$

$$P(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{t}^{\infty} \exp\left(-\frac{(\tau - t_{\text{н}})^2}{2\sigma^2}\right) d\tau,$$

$$Q(t) = 1 - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} exp\left(\frac{-(\tau - t_{\text{н}})^2}{2\sigma^2}\right) d\tau,$$

$$\lambda(t) = \frac{\exp\left(-\frac{(t - t_{\text{н}})^2}{2\sigma^2}\right)}{\int_t^{\infty} \exp\left(-\frac{(\tau - t_{\text{н}})^2}{2\sigma^2}\right) d\tau},$$

где $t_{\text{н}}$ и σ^2 – параметры распределения. Графики функциональных показателей надежности для нормального распределения представлены на рис. 1.9.

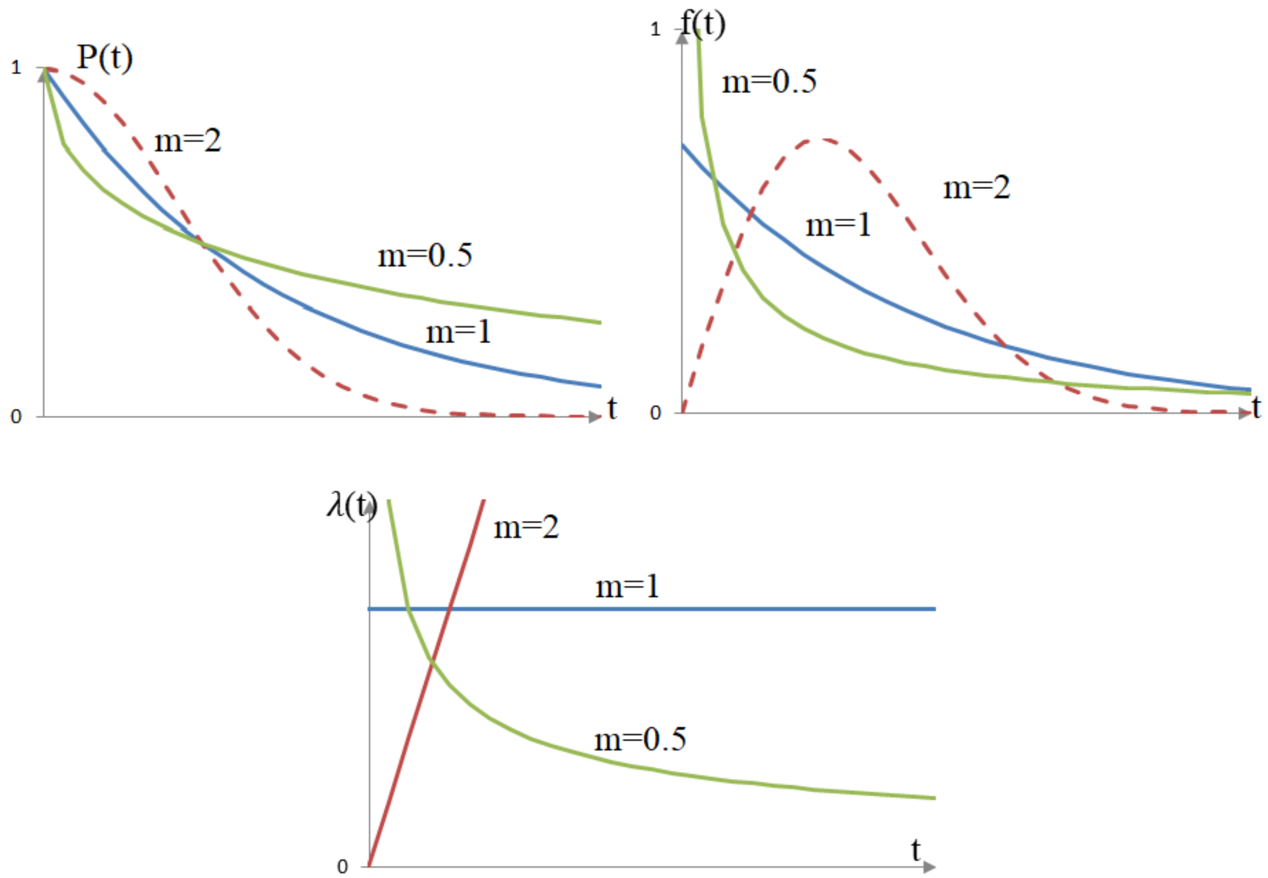

Рис. 1.8. Показатели надежности для распределения Вейбулла при различных m

Нормальное распределение можно использовать для описания положительной наработки на отказ только при ($t_{\text{н}} \geq (2-3)\sigma$), так как возникающая при этом погрешность за счет «отбрасывания» значений характеристик при $t < 0$ мала. Например, при $t_{\text{н}} = 3\sigma$ доля не учитываемой плотности при отрицательных t составляет примерно 0,15 %, а при $t_{\text{н}} = 2\sigma$ – не более 2,5 %.

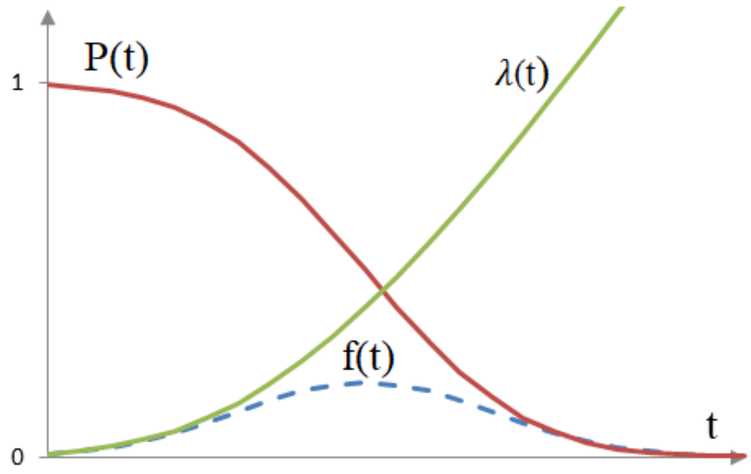

Рис. 1.9. Показатели надежности для нормального распределения

Нормальное распределение используется для описания постепенных отказов, возникающих по ряду причин (не менее 6–8). Данное распределение также целесообразно применять на участке физического износа элементов;

г) *усеченное нормальное распределение* получают из нормального распределения при $t_{\text{н}} < 2\sigma$:

$$F(t) = \begin{cases} 0, t < 0, \\ 1 - \dfrac{C}{\sigma\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^t \exp\left(\dfrac{-(\tau - t_{\text{н}})^2}{2\sigma^2}\right) d\tau, t \geq 0, \end{cases}$$

$$f(t) = \begin{cases} 0, t < 0, \\ \dfrac{C}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\dfrac{-(t - t_{\text{н}})^2}{2\sigma^2}\right), t \geq 0, \end{cases}$$

$$P(t) = \begin{cases} 0, t < 0, \\ \dfrac{C}{\sigma\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^t \exp\left(\dfrac{-(\tau - t_{\text{н}})^2}{2\sigma^2}\right) d\tau, t \geq 0, \end{cases}$$

$$Q(t)=\begin{cases}0, t<0,\\ 1-\dfrac{C}{\sigma\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int\limits_{\mathbf{0}}^{t}\exp\left(\dfrac{-(\tau-t_{\text{н}})^2}{2\sigma^2}\right)d\tau, t\geq 0,\end{cases}$$

$$\lambda(t)=\exp\left(\frac{-(t-t_{\text{н}})^2}{2\sigma^2}\right)/\int\limits_{\mathbf{0}}^{t}\exp\left(\frac{-(\tau-t_{\text{н}})^2}{2\sigma^2}\right)d\tau, t\geq 0,$$

где $\mathrm{t}_{\text{н}}$, σ^2 – параметры распределения, поправочный множитель *C* определяется из условия

$$\frac{C}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{(\tau-t_{\text{н}})^2}{2\sigma^2}\right)d\tau=1.$$

Параметры усеченного нормального распределения связаны с соответствующими параметрами неусеченного нормального распределения по следующим формулам:

$$t_{\text{н}}=\bar{t_{\text{н}}}+C_1\cdot\bar{\sigma},\qquad \sigma^2=\overline{\sigma^2}\left(1-\frac{C_1\cdot\bar{t_{\text{н}}}}{\bar{\sigma}}\right),$$

где $\bar{t_{\text{н}}}$, $\overline{\sigma^2}$ – параметры нормального распределения,

$$C_1=\frac{C}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{(t_{\text{н}}^*)^2}{2(\sigma^*)^2}\right)dt.$$

Для описания надежности серийных технических средств автоматизации неусеченное нормальное распределение применяется редко, поскольку для них $t_{\text{н}}/\sigma<2-3$;

д) *распределение Релея* является частным случаем распределения Вейбулла при $m=2$ и $k=\frac{1}{2\sigma^2}$, где σ^2 – параметр распределения. Функциональные показатели распределения Релея:

$$F(t)=1-e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}},\quad f(t)=\frac{t}{\sigma^2}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}},$$

$$P(t) = e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}, \quad Q(t) = 1 - e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}, \quad \lambda(t) = \frac{t}{\sigma^2}.$$

Графики функциональных показателей надежности для распределения Релея приведены на рис. 1.10.

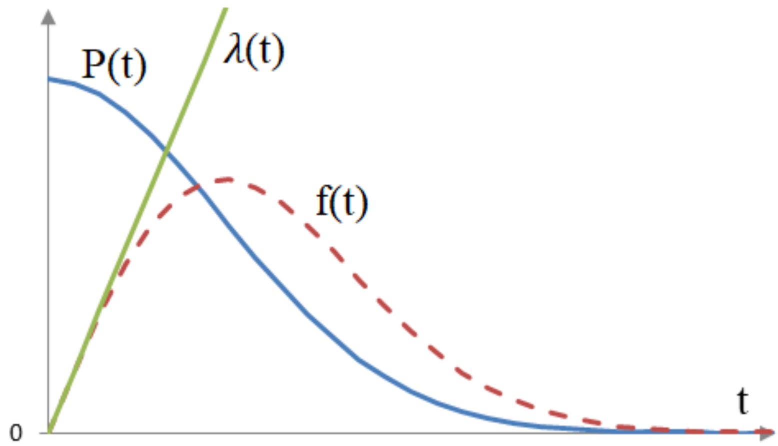

Рис. 1.10. Показатели надежности для распределения Релея

Среднее время безотказной работы при распределении Релея определяется по формуле

$$t_{\text{н}} = \sigma \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}};$$

е) *гамма-распределение*:

$$F(t) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda \cdot t)^i}{i!} e^{-\lambda t}, \quad f(t) = \frac{\lambda^k \cdot t^{k-1}}{\Gamma(k)} e^{-\lambda t},$$

$$P(t) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda \cdot t)^i}{i!} e^{-\lambda t}, \quad Q(t) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda \cdot t)^i}{i!} e^{-\lambda t},$$

$$\lambda(t) = \frac{\lambda^k \cdot t^{k-1}}{\Gamma(k) \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda \cdot t)^i}{i!}}, \quad t_{\text{н}} = \frac{k}{\lambda}, \quad \sigma^2 = \frac{k}{\lambda^2},$$

где k и λ – параметры распределения. Параметр λ определяет масштаб распределения, а параметр k – вид распределения. При $k = 1$ оно превращается в экспоненциальное распределение. Графики функциональных показателей надежности для гамма-распределения показаны на рис. 1.11.

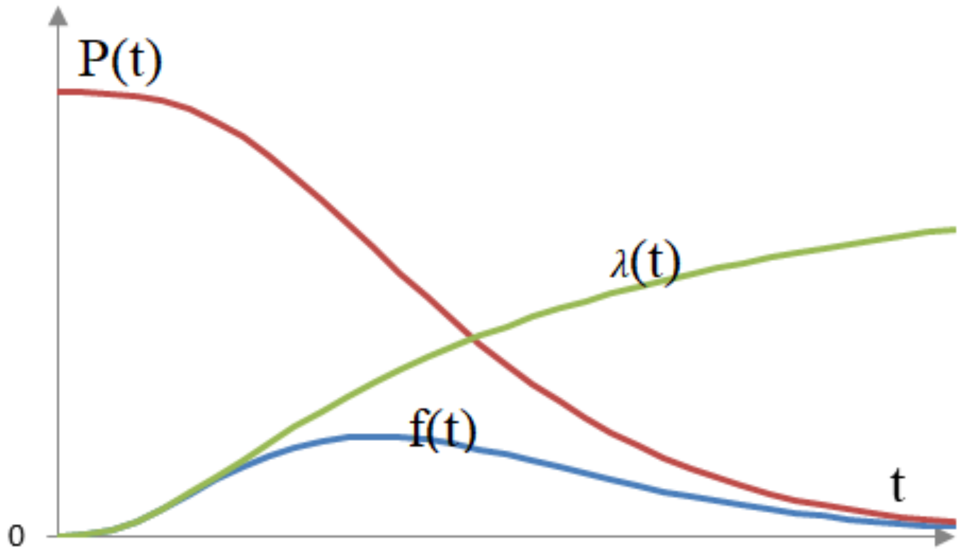

Рис. 1.11. Показатели надежности для гамма-распределения

Состав используемых в моделях надежности распределений можно расширить, используя операции суперпозиции и композиции стандартных распределений.

Суперпозицией распределений называется операция вида

$$f(t) = C_1 \cdot f_1(t) + C_2 \cdot f_2(t) + \cdots + C_n \cdot f_n(t), \qquad (1.2)$$

где $f_i(t)$ – функция плотности стандартного распределения; C_i – весовые коэффициенты, удовлетворяющие условию

$$\sum_{i=1}^{n} C_i = 1.$$

Если $f_i(t)$ являются экспоненциальными функциями распределения вероятностей, т. е.

$$f_i(t) = \lambda_i e^{-\lambda_i t},$$

то (1.2) называется гиперэкспоненциальным распределением. Интенсивность отказов этого распределения является монотонно убывающей функцией, которая изменяется от значения

$$\lambda_0 = \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot \lambda_i$$

при $t = 0$ до значения

$$\lambda_\infty = \min_i \lambda_i$$

при $t \to \infty$. В частном случае при $n = 2$ для суперпозиции двух экспоненциальных распределений справедливо:

$$f(t) = C\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + (1 - C)\lambda_2 e^{-\lambda_2 t},$$

$$P(t) = Ce^{-\lambda_1 t} + (1 - C)e^{-\lambda_2 t},$$

$$\lambda(t) = \frac{C\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + (1 - C)\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}}{Ce^{-\lambda_1 t} + (1 - C)e^{-\lambda_2 t}},$$

$$\lambda(0) = C\lambda_1 + (1 - C)\lambda_2,$$

$$t_\text{н} = \frac{C}{\lambda_1} + \frac{1 - C}{\lambda_2}.$$

При $\lambda_2 \gg \lambda_1$ при $t \to \infty$ $\lambda(t) \to \lambda_1$ (рис. 1.12). Суперпозицию экспоненциальных распределений применяют для описания поведения элементов на участках приработки.

Операция суперпозиции распределений позволяет получать модели безотказности элемента с немонотонными функциями интенсивности отказов. Например, суперпозиция двух стандартных распределений: экспоненциального распределения и гамма-распределения с плотностью вероятности отказа вида

$$[f(t) = C\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + (1 - C)\lambda_2 \frac{(\lambda_2 \cdot t)^{k-1}}{(k - 1)!} e^{-\lambda_2 t}]$$

при значениях параметров $\lambda_1 = 0{,}8, \lambda_2 = 0{,}9, k = 4$ и весовом коэффициенте $C = 0{,}2$ представлена на рисунке 1.13 (кривые *1* и *2* – плотности вероятности отказа слагаемых, кривая *3* – плотность вероятности отказа для суперпозиции).

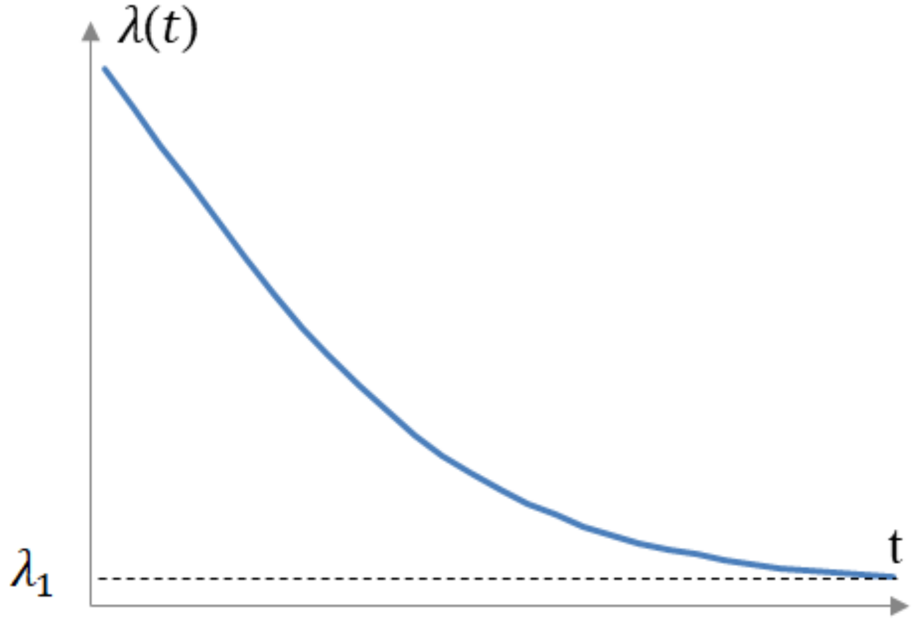

Рис. 1.12. Суперпозиция двух экспоненциальных распределений

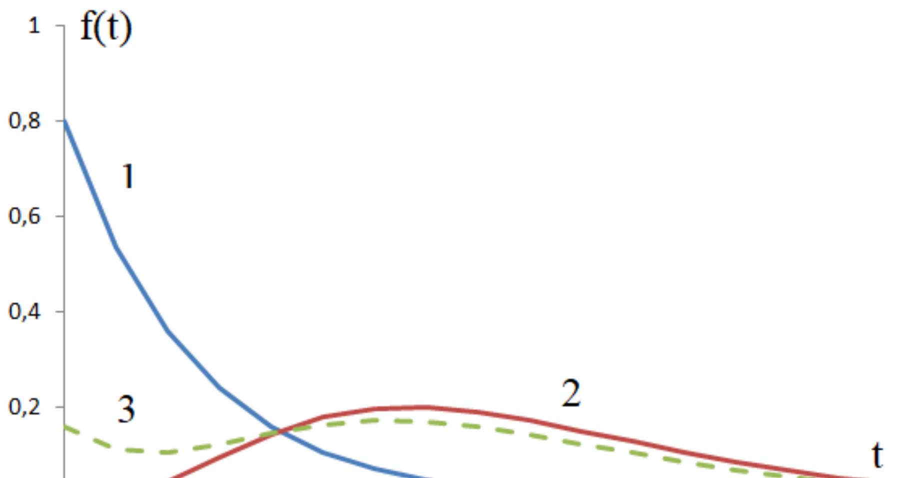

Рис. 1.13. Плотность вероятности отказа для суперпозиции распределений Эрланга

Для построения модели надежности элемента с внезапными и постепенными отказами применяют суперпозицию экспоненциального и усеченного нормального распределений:

$$f(t) = C_1\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 \frac{C}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t - t_{\text{н}})^2}{2\sigma^2}\right),$$

где $C_1 + C_2 = 1$.

Весовые коэффициенты C_1, C_2 характеризуют частоты внезапных и постепенных отказов.

Композицией распределений называется операция типа свертки над исходными функциями распределения. Операция композиции двух распределений имеет вид

$$F(t) = P\{T_1 + T_2 < t\} = F_1(t)^* F_2(t) = \int_0^t F_2(t - x) dF_1(x).$$

Для композиции *n* распределений справедливо

$$F(t) = P\{T_1 + T_2 + \dots + T_n < t\} = F_1(t)^* F_2(t)^* \dots {}^*F_n(t) =$$

$$= \int_0^t dF_1(x_1) \int_0^{t-x_1} dF_2(x_2) \dots \int_0^{t-x_1-\dots-x_{n-1}} F_n(t - x_1 - \dots - x_{n-1}) dF_{n-1}(x_n).$$

В результате композиции некоторых стандартных распределений получают распределение того же типа, что и исходные функции распределения. Например, многократная композиция гамма-распределений с одинаковыми параметрами масштаба и разными параметрами формы является гамма-распределением с тем же параметром масштаба, но параметром формы, равным сумме параметров формы исходных распределений. Однако композиция распределений Вейбулла не является распределением Вейбулла.

Восстанавливаемый элемент после каждого *j*-го отказа ремонтируется обслуживающим персоналом в течение времени $t_j^{\text{в}}$ – значения случайной величины $T^{\text{в}}$ – времени восстановления элемента. Процесс восстановления работоспособности можно разделить на последовательные операции, поэтому время восстановления имеет вид

$$T^{\text{в}} = T_{\text{обн}} + T_{\text{лок}} + T_{\text{уст}} + T_{\text{нал}} + T_{\text{пп}}, \tag{1.3}$$

где $T_{обн}$ – время обнаружения отказа; $T_{лок}$ – время локализации отказа; $T_{уст}$ – время устранения отказа; $T_{нал}$ – время наладки аппаратуры после устранения отказа; $T_{пп}$ – время предпусковой проверки аппаратуры.

К функциональным показателям ремонтопригодности относятся:

– вероятность своевременного восстановления работоспособного состояния элемента за время $t^{в}$:

$$Q(t^{в}) = P\{T^{в} < t^{в}\}, \quad t^{в} \geq 0,$$

где $T^{в}$ – время восстановления элемента. Статистическая вероятность своевременного восстановления:

$$\hat{Q}(t^{в}) = \frac{N(t^{в})}{N},$$

где $N(t^{в})$ – количество восстановлений к моменту времени $t^{в}$;

– вероятность того, что восстановление не закончится к заданному моменту времени $t^{в}$, т. е. вероятность несвоевременного завершения ремонта:

$$P(t^{в}) = P\{T^{в} > t^{в}\}, \quad t^{в} \geq 0.$$

Статистическая функция несвоевременного завершения ремонта:

$$\hat{P}(t^{в}) = \frac{N - N(t^{в})}{N},$$

где $N - N(t^{в})$ – количество невосстановленных к моменту времени $t^{в}$ изделий;

– плотность вероятности восстановления отказавшего элемента:

$$f(t^{в}) = \frac{dQ(t^{в})}{dt^{в}}.$$

Статистическая функция плотности:

$$\hat{f}(t^{в}) = \frac{\Delta N / \Delta t^{в}}{N},$$

где ΔN – количество восстановлений на малом интервале времени $\Delta t^{в}$;

– интенсивность восстановления – условная плотность вероятности восстановления элемента в момент времени $t^{\text{в}}$ при условии, что до этого момента времени элемент еще не восстановлен:

$$\mu(t^{\text{в}}) = \frac{f(t^{\text{в}})}{P(t^{\text{в}})}.$$

Статистическая интенсивность восстановления:

$$\hat{\mu}(t^{\text{в}}) = \frac{\Delta N/\Delta t^{\text{в}}}{N - N(t^{\text{в}})}.$$

К числовым показателям ремонтопригодности относятся:

1) среднее время восстановления – математическое ожидание случайной величины $T^{\text{в}}$:

$$t_{\text{н}}^{\text{в}} = M[T^{\text{в}}] = \int_0^{\infty} t^{\text{в}} \cdot f(t^{\text{в}}) dt^{\text{в}} = \int_0^{\infty} P(t^{\text{в}}) dt^{\text{в}}.$$

Оценка среднего времени восстановления определяется по экспериментальным значениям длительности ремонта N однородных элементов $t_j^{\text{в}}, j = 1, \ldots, N$:

$$\hat{t}_{\text{н}}^{\text{в}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} t_j^{\text{в}};$$

2) дисперсия и среднеквадратическое отклонение времени восстановления:

$$\sigma_{\text{в}}^2 = M[(T^{\text{в}} - \hat{t}_{\text{н}}^{\text{в}})^2] = \int_0^{\infty} (t^{\text{в}} - \hat{t}_{\text{н}}^{\text{в}})^2 \cdot f(t^{\text{в}}) dt^{\text{в}}, \quad \sigma_{\text{в}} = \sqrt{\sigma_{\text{в}}^2}.$$

Оценка дисперсии времени восстановления:

$$\hat{\sigma}_{\text{в}}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^{N} \left(t_j^{\text{в}} - \hat{t}_{\text{н}}^{\text{в}}\right)^2.$$

В моделях восстанавливаемости используются в основном следующие распределения времени восстановления:

а) экспоненциальное распределение:

$$F(t^{\text{в}}) = 1 - e^{-\mu t^{\text{в}}}, \quad f(t^{\text{в}}) = \mu e^{-\mu t^{\text{в}}},$$

$$P(t^{\text{в}}) = e^{-\mu t^{\text{в}}}, \quad Q(t^{\text{в}}) = 1 - e^{-\mu t^{\text{в}}}, \quad t_{\text{н}}^{\text{в}} = \frac{1}{\mu}, \quad \sigma_{\text{в}}^2 = \frac{1}{\mu^2},$$

где $\mu(t^{\text{в}}) = \mu = const$ – параметр этого распределения (интенсивность восстановления).

Графики зависимостей функциональных показателей ремонтопригодности от времени для экспоненциального распределения представлены на рис. 1.14.

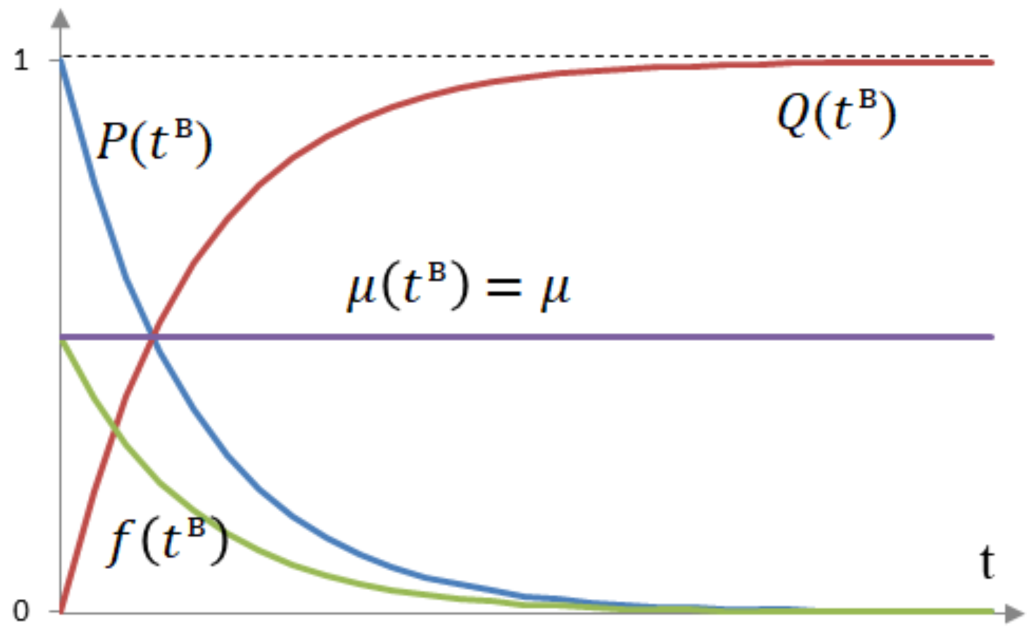

Рис. 1.14. Графики функциональных показателей ремонтопригодности для экспоненциального распределения

При исследовании ремонтопригодности технических средств автоматизации поведение непрерывной случайной величины $T^{\text{в}}$ наиболее часто описывают экспоненциальным распределением. Экспоненциальное распределение применяют в том случае, когда основным слагаемым в (1.3) является время устранения отказа, а также при устранении отказа путем быстрой замены отказавшего элемента работоспособным;

б) равномерное распределение:

$$F(t^{\text{в}}) = \begin{cases} 0, t^{\text{в}} < a, \\ \dfrac{t^{\text{в}} - a}{b - a}, \ a \le t^{\text{в}} \le b, \\ 1, t^{\text{в}} > b, \end{cases}$$

$$f(t^{\text{в}}) = \begin{cases} 0, t^{\text{в}} < a, \\ \dfrac{1}{b - a}, \ a \le t^{\text{в}} \le b, \\ 0, t^{\text{в}} > b, \end{cases}$$

$$P(t^{\text{в}}) = \begin{cases} 0, t^{\text{в}} < a, \\ \dfrac{b - t^{\text{в}}}{b - a}, \ a \le t^{\text{в}} \le b, \\ 1, t^{\text{в}} > b, \end{cases}$$

$$Q(t^{\text{в}}) = \begin{cases} 0, t^{\text{в}} < a, \\ \dfrac{t^{\text{в}} - a}{b - a}, \ a \le t^{\text{в}} \le b, \\ 1, t^{\text{в}} > b, \end{cases}$$

$$t_{\text{н}}^{\text{в}} = \frac{a + b}{2}, \quad \sigma_{\text{в}}^2 = \frac{(b - a)^2}{12};$$

в) распределение Эрланга (гамма-распределение с целочисленным параметром k):

$$F(t^{\text{в}}) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\mu \cdot t^{\text{в}})^i}{i!} e^{-\mu t^{\text{в}}}, \quad f(t^{\text{в}}) = \frac{\mu^k \cdot (t^{\text{в}})^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\mu t^{\text{в}}},$$

$$P(t^{\text{в}}) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\mu \cdot t^{\text{в}})^i}{i!} e^{-\mu t^{\text{в}}}, \quad Q(t^{\text{в}}) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\mu \cdot t^{\text{в}})^i}{i!} e^{-\mu t^{\text{в}}},$$

$$t_{\text{н}} = \frac{k}{\mu}, \quad \sigma^2 = \frac{k}{\mu^2},$$

где $k > 0$ и $\mu > 0$ – параметры распределения.

Распределение Эрланга k-го порядка применяется в том случае, когда составляющие времени восстановления имеют экспоненциальное распределение с параметром μ.

Пусть $t_j, j = 1,2, \dots$ – наработки до первого отказа и между отказами элемента. Последовательность $\{t_j, j = 1,2, \dots\}$ образует поток отказов элемента как разновидность потока случайных событий. Поток отказов можно задать следующими случайными величинами: числом отказов N на интервале $(0, t)$ или совокупностью наработок между отказами $t_1, t_2, \dots$ для восстанавливаемого элемента (до отказов для невосстанавливаемого элемента).

Поток называется *стационарным*, если вероятность наступления определенного числа отказов на заданном интервале времени (или до заданной наработки) зависит только от величины этого интервала времени и не зависит от его расположения по оси времени.

Поток называется *ординарным*, если вероятность наступления не менее двух отказов на малом промежутке времени есть величина более высокого порядка малости, чем величина этого промежутка.

Поток отказов называется *потоком без последействия*, если вероятность наступления некоторого числа отказов на заданном интервале времени не зависит от того, сколько отказов и в какие моменты времени наступило до рассматриваемого интервала.

Поток отказов называется *потоком с ограниченным последействием*, если вероятность наступления некоторого числа отказов на заданном интервале времени зависит только от того, в какой момент времени наступил последний отказ перед рассматриваемым интервалом времени.

Поток отказов, не обладающий свойствами отсутствия последействия и ограниченного последействия, называется *потоком со сложным последействием*.

Поток отказов, обладающий свойствами стационарности, ординарности и отсутствия последействия, называется простейшим потоком (стационарный пуассоновский поток). Для простейшего потока число отказов на интервале $(0, t)$ имеет распределение Пуассона:

$$P_N(t) = \frac{(\lambda \cdot t)^N}{N!} e^{-\lambda t},$$

где N – число отказов за время t, λ – интенсивность потока отказов, $P_N(t)$ – вероятность того, что за время t произойдет N отказов.

Нестационарный пуассоновский поток отказов является потоком, обладающим свойствами ординарности и отсутствия последействия. Стационарный рекуррентный поток отказов является стационарным ординарным потоком с ограниченным последействием. Рекуррентный поток отказов является ординарным потоком с ограниченным последействием. Обобщенный пуассоновский поток отказов является потоком, обладающим свойствами стационарности, ординарности и сложным последействием.

Стационарный и нестационарный пуассоновские потоки соответствуют марковской модели безотказности, рекуррентный и стационарный рекуррентный потоки соответствуют полумарковской модели, а обобщенный пуассоновский поток – немарковской модели безотказности.

Модель контроля и диагностирования характеризует полноту и достоверность контроля и диагностирования, какими ресурсами и в каком количестве обеспечиваются эти характеристики. Важность этой модели объясняется следующим:

– контроль и диагностирование улучшают показатели надежности, поскольку позволяют снизить или исключить долю скрытых отказов и улучшить показатели восстанавливаемости;

– на организацию и проведение контроля и диагностирования затрачиваются определенные ресурсы (аппаратура, объем памяти, время функционирования), что снижает показатели надежности, потому что сама аппаратура контроля может отказать, увеличение времени функционирования приводит к повышению вероятности отказа основной аппаратуры, а вынужденное увеличение производительности устройств для компенсации потерь времени может привести к увеличению интенсивности отказов.

Модель контроля и диагностирования устанавливает зависимость ошибок первого и второго рода от выделенных ресурсов. Ошибкой первого рода является необнаружение возникших отказов, а ошибкой второго рода – выдача ложного сигнала об отказе элемента.

При аппаратном контроле для оценки затрат на организацию встроенного контроля в основном используют следующие эмпирические модели:

1) логарифмическая модель:

$$\delta = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{1}{1-\alpha}\right), \quad \alpha = 1 - e^{-a\delta},$$

где α – коэффициент полноты контроля, $\delta = \frac{\lambda_k}{\lambda_0}$ – коэффициент относительных затрат аппаратуры на систему контроля, λ_k и λ_0 – интенсивности отказов контрольного и основного оборудования; a – параметр модели, который для различных устройств варьируется в диапазоне от 5 до 10. Данная модель удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными при $\alpha < 0{,}98$;

2) модель типа Вейбулла:

$$\delta = \frac{1}{a}\left(\ln\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)\right)^{m}, \quad \alpha = 1 - \exp\left(-(a\delta)^{\frac{1}{m}}\right), \tag{1.4}$$

где a и m – параметры модели. Параметр m обычно находится в диапазоне от 0,8 до 1,2;

3) степенная модель:

$$[\delta = \alpha^{m}, \quad \alpha = \delta^{\frac{1}{m}}, \quad m \gg 1. \tag{1.5}$$

Эта модель хорошо описывает экспериментальные данные при $\alpha > 0{,}98$.

При программном контроле имеет место нелинейная зависимость коэффициента полноты тестирования α от длительности тестирования t_k:

$$t_k = t_k^0 \cdot f(\alpha), \quad \alpha = \varphi(t_k), \quad t_k \le t_k^0, \tag{1.6}$$

где t_k^0 – длительность полного теста. Зависимости (1.6) аналогичны (1.4), (1.5), в которых $\delta = L/L_0$, где L и L_0 – длина неполного и полного тестов соответственно. Параметры a, m определяют методом наименьших квадратов по экспериментальным данным.

Самовосстанавливающаяся система «восстанавливаемый элемент – обслуживающий персонал» часть времени находится в работоспособном состоянии, а часть – в состоянии восстановления. Чем больше доля времени, в течение которого система работоспособна или готова к выполнению своих функций, тем более надежной считается система. Степень работоспособности системы «восстанавливаемый элемент – обслуживающий персонал» характеризуется следующими комплексными показателями надежности, учитывающими безотказность и ремонтопригодность элемента и обслуживающего персонала:

1. *Функция готовности* $K_г(t)$– вероятность того, что элемент работоспособен в произвольный момент времени *t*.

2. Если момент времени *t* достаточно удален от нуля и имеет место установившийся или стационарный режим функционирования, то функция готовности превращается в *коэффициент готовности* $K_г$, т. е.

$$K_г = \lim_{t\to\infty} K_г\,(t).$$

Коэффициент готовности – средняя доля времени, в течение которого система находится в работоспособном состоянии от общего времени ее эксплуатации:

$$K_г = \frac{t_н}{t_н + t_н^в}, \quad 0 \le K_г \le 1.$$

Если случайные величины T и $T^в$ распределены по экспоненциальному закону, то коэффициент готовности равен

$$K_г = \frac{\mu}{\lambda + \mu}.$$

Серийные технические средства автоматизации имеют коэффициент готовности $K_г \approx 0{,}7 \div 0{,}9$. При автоматизации ответственных объектов, например пожаро- и взрывоопасных технологических процессов, стремятся обеспечить в основном за счет почти мгновенного восстановления значение коэффициента готовности $K_г \approx 0{,}95 \div 0{,}99$.

Статистическая оценка коэффициента готовности определяется по результатам испытаний надежности N систем «восстанавливаемый элемент – обслуживающий персонал» или известным оценкам $t_н$, $t_н^в$:

$$\boldsymbol{\widehat{K}_г} = \frac{\boldsymbol{N(t)}}{\boldsymbol{N}} = \frac{\boldsymbol{\hat{t}_н}}{\boldsymbol{\hat{t}_н + \hat{t}_н^в}},$$

где $\boldsymbol{N(t)}$ – число работоспособных систем в «удаленный» момент времени t.

3. *Коэффициент простоя* $K_п$ – вероятность того, что элемент находится в ремонте в удаленный момент времени, или средняя доля времени, в течение которого элемент находится в состоянии ремонта:

$$K_п = \frac{t_н^в}{t_н + t_н^в} = 1 - K_г.$$

4. Коэффициент оперативной готовности $K_{ог}(t)$ – вероятность того, что элемент работоспособен в удаленный момент времени t_0 и безотказно проработает на интервале времени $(t_0, t_0 + t)$:

$$K_{ог}(t) = K_г \cdot P(t_0, t) = \frac{t_н^в}{t_н + t_н^в} \cdot P(t_0, t),$$

где $P(t_0, t)$ – условная вероятность безотказной работы элемента на интервале $(t_0, t_0 + t)$ при условии, что он работоспособен в момент времени t_0.

При экспоненциальном распределении времени безотказной работы T и времени восстановления $T^в$ справедливо

$$K_{ог}(t) = \frac{t_н}{t_н + t_н^в} \cdot e^{-\frac{t}{t_н}} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \cdot e^{-\lambda t}.$$

5. *Коэффициент контролируемой готовности* $K_{кг}$ (используется, когда в элементе могут возникать скрытые отказы, т. е. система контроля и диагностирования не идеальна) – вероятность того, что согласно показаниям системы контроля и диагностирования элемент работоспособен в произвольный момент времени периода применения по назначению:

$$K_{кг} = \frac{t_н + t_{со}}{t_н + t_н^в + t_{со}},$$

где $t_{со}$ – среднее время пребывания в состоянии скрытого отказа. В аналогичных условиях коэффициент готовности

$$K_г = \frac{t_н}{t_н + t_н^в + t_{со}},$$

следовательно, $K_{кг} \geq K_г$.

6. *Вероятность безотказного применения* $P_{пр}(t)$ (используется в том случае, когда в элементе могут возникать скрытые отказы) – условная вероятность того, что до наработки t скрытый отказ в элементе не произойдет при условии, что его не было в начальный момент времени:

$$K_{ог}(t) = K_{кг} \cdot P_{пр}(t), \quad P_{пр}(t) = \frac{K_г \cdot P(t_0, t)}{K_{кг}}.$$

7. Существуют изделия, которые периодически выводятся на время $t_{пр}$ из эксплуатации, например, для профилактики. Это время вынужденного «простоя» $t_{пр}$ изделия не связано непосредственно с его безотказностью и ремонтопригодностью и не учитывается при определении $t_н$ и $t_н^в$, а следовательно, $K_г$ и $K_{ог}(t)$. Если математическое ожидание случайной величины $t_{пр}$ соизмеримо с $t_н$ и $t_н^в$, то безотказность и ремонтопригодность элемента с вынужденными простоями характеризуется *коэффициентом технического использования*:

$$K_{ти} = \frac{t_н}{t_н + t_н^в + M\left[t_{пр}\right]},$$

где $M\left[t_{пр}\right]$ – математическое ожидание величины $t_{пр}$.

Методика расчета показателей надежности элемента зависит от вида моделей безотказности, восстанавливаемости, контроля и диагностирования. В марковской модели надежности используются следующие допущения: поток отказов элемента является простейшим с параметром λ, время восстановления имеет экспоненциальное распределение с параметром μ. Предполагается, что контроль работоспособности является идеальным, т. е. все возникающие отказы мгновенно обнаруживаются. При указанных допущениях элемент может находиться только в одном из двух состояний:

1 – элемент работоспособен;

2 – элемент неработоспособен (восстанавливается).

Граф возможных состояний и переходов элемента представлен на рис. 1.15.

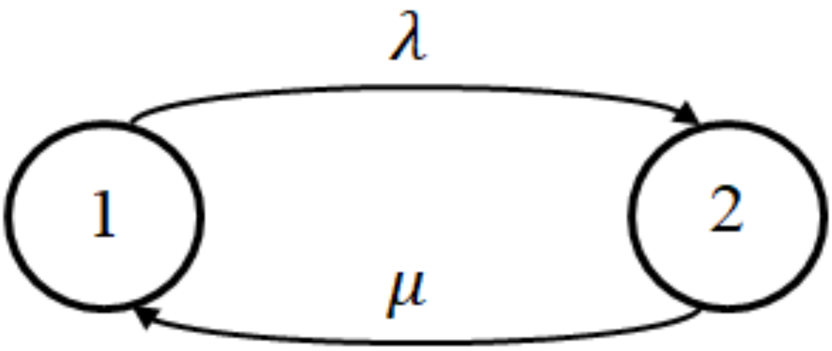

Рис. 1.15. Граф состояний элемента

Пусть $P_1(t)$ и $P_2(t)$ – вероятности пребывания элемента в состояниях *1* и *2*. Очевидно, что $P_1(t) + P_2(t) = 1$. Система дифференциальных уравнений Колмогорова в соответствии с графом состояний имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dP_1(t)}{dt} = -\lambda P_1(t) + \mu P_2(t), \\ \frac{dP_2(t)}{dt} = \lambda P_1(t) - \mu P_2(t). \end{cases} \tag{1.7}$$

Начальные условия для (1.7) следующие: $P_1(0) = 1, P_2(0) = 0$. Используя преобразование Лапласа, получим

$$\begin{cases} (s + \lambda)P_1(s) - \mu P_2(s) = 1, \\ -\lambda P_1(s) + (s + \mu)P_2(s) = 0, \end{cases} \tag{1.8}$$

где $P_1(s)$, $P_2(s)$ – изображения по Лапласу вероятностей $P_1(t)$, $P_2(t)$. Решая систему уравнений (1.8) методом Крамера, найдем изображение функции готовности:

$$K_\text{г}(s) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -\mu \\ 0 & s + \mu \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s + \lambda & -\mu \\ -\lambda & s + \mu \end{vmatrix}} = \frac{s + \mu}{s(s + \lambda + \mu)} = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \cdot \frac{1}{s} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \cdot \frac{1}{s + \lambda + \mu}.$$

С помощью обратного преобразования Лапласа получим оригинал функции готовности:

$$[K_{\text{г}}(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}. \tag{1.9}$$

Если контроль работоспособности элемента не является идеальным, т. е. в элементе могут возникать скрытые отказы, доля которых составляет $\beta = 1 - \alpha$, а время обнаружения скрытого отказа имеет экспоненциальное распределение с параметром(ν, то элемент может находиться только в одном из трех состояний:

1 – элемент работоспособен;

2 – элемент неработоспособен, отказ обнаружен и осуществляется восстановление работоспособности;

3 – элемент неработоспособен, но отказ не обнаружен.

Граф возможных состояний и переходов элемента имеет вид, приведенный на рис. 1.16.

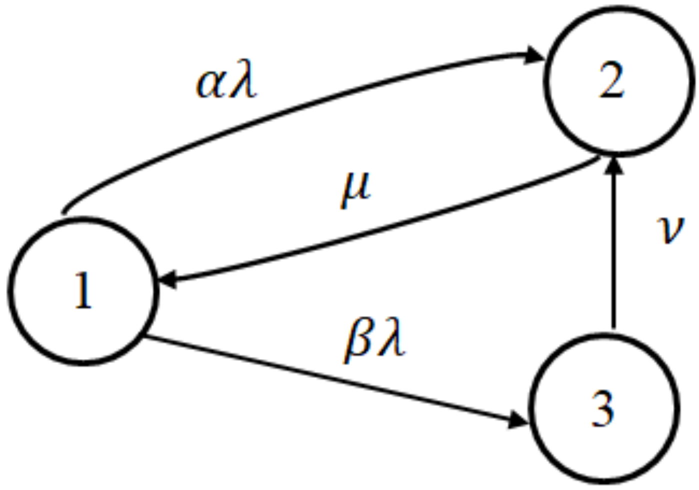

Рис. 1.16. Граф состояний элемента со скрытыми отказами

Система дифференциальных уравнений Колмогорова имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dP_1(t)}{dt} = -\lambda P_1(t) + \mu P_2(t), \\ \frac{dP_2(t)}{dt} = \alpha\lambda P_1(t) - \mu P_2(t) + \nu P_3(t), \\ \frac{dP_3(t)}{dt} = \beta\lambda P_1(t) - \nu P_3(t), \\ P_1(t) + P_2(t) + P_3(t) = 1. \end{cases} \tag{1.10}$$

Начальные условия для (1.10) следующие: $P_1(0) = 1, P_2(0) = 0$, $P_3(0) = 0$.

Стационарные вероятности состояний $p_i, i = 1,2,3$ находят из системы алгебраических уравнений Колмогорова, получаемой из (1.7):

$$\begin{cases} -\lambda p_1 + \mu p_2 = 0, \\ \alpha\lambda p_1 - \mu p_2 + \nu p_3 = 0, \\ \beta\lambda p_1 - \nu p_3 = 0, \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases} \quad (1.11)$$

Решая систему уравнений (1.11), получим коэффициент готовности и коэффициент контролируемой готовности:

$$K_{\text{г}} = p_1 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\beta\lambda}{\nu}},$$

$$K_{\text{кг}} = p_1 + p_3 = \frac{1 + \frac{\beta\lambda}{\nu}}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\beta\lambda}{\nu}}.$$

Вероятность безотказного применения:

$$P_{\text{пр}}(t) = \frac{K_{\text{г}} \cdot e^{-\lambda t}}{K_{\text{кг}}} = \frac{e^{-\lambda t}}{1 + \frac{\beta\lambda}{\nu}}.$$

Функциональные и числовые показатели надежности можно представить в векторной форме:

$$B(t) = [Q(t), P(t), f(t), \lambda(t), \mu(t), K_{\text{г}}(t), \dots],$$

$$a = \left[t_{\text{н}}, \sigma^2, t_{\gamma}, P(t_h), t_{\text{н}}^{\text{в}}, \sigma_{\text{в}}^2, K_{\text{г}}, \dots\right],$$

при этом каждая составляющая вектора $B(t)$ зависит от одного или более числовых показателей, т. е. $B(t, a), t \geq 0$.

При определении единичных и комплексных показателей надежности технических элементов возникают два типа задач:

1. Определение показателя надежности a, основанное на решении уравнения

$$B(t_0, a) = B_0, \tag{1.12}$$

где t_0 – заданный момент времени; B_0 – значение показателя $B(t_0, a)$ в момент t_0.

2. Определение значения t_γ или $t_\gamma^{\text{г}}$ при известных законе распределения $B(t, a)$, значениях B_0 и a_0, основанное на решении уравнения

$$B(t, a_0) = B_0. \tag{1.13}$$

Методика решения задач по данной теме заключается в следующем:

1) проанализировать условия задачи, выявить заданные величины и дополнительные условия для нахождения параметров B_0 и a_0;

2) составить математическое описание задачи в виде (1.12) или (1.13);

3) решить уравнение (1.12) или (1.13) относительно a или t;

4) проверить правильность решения.

1.2. Задачи по теме «Определение единичных показателей надежности технических элементов»

Задача 1. Вероятность отказа технического элемента к моменту времени 200 ч равна 0,6. Определить среднюю наработку до отказа элемента. Каким образом необходимо изменить среднюю наработку до отказа элемента, чтобы уменьшить вероятность отказа за это же время с 0,6 до 0,4?

Задача 2. К моменту времени 300 ч из тысячи одновременно включенных однотипных элементов отказало 400 элементов. Найти оценки средней наработки до отказа и интенсивности отказов элемента.

Задача 3. В процессе наблюдений за испытаниями 10000 однотипных невосстанавливаемых элементов на интервале времени (495, 505) ч зафиксировано 6 отказов. Определить среднюю наработку до отказа и гамма-ресурс элемента при $P_\gamma = 0{,}9$.

Задача 4. Интенсивность восстановления технического элемента равна $\mu = 0{,}05$ ч$^{-1}$, его гамма-ресурс составляет 700 ч при гарантированном уровне надежности 0,6. Определить среднюю наработку до отказа и плотность вероятности восстановления элемента при $t = 380$ ч.

Задача 5. Вероятность безотказной работы элемента изменилась в 1,1 раза за время его эксплуатации 200 ч. Определить гамма-ресурс элемента при $P_\gamma = 0{,}22$.

Задача 6. Плотность вероятности отказа изменилась в 1,5 раза за время эксплуатации элемента, равное 300 ч. Определить среднюю наработку до отказа элемента и вероятность его отказа в момент времени 120 ч.

Задача 7. При испытании большого числа однотипных элементов в момент времени t_0 было исправно 500 элементов, а на малом интервале времени $(t_0, t_0 + 5)$ отказало 2 элемента. Определить оценки средней наработки до отказа элемента и вероятности его отказа в момент времени 1000 ч.

Задача 8. При испытании 1000 однотипных элементов на интервале времени (295, 305) ч отказало 5 элементов. Определить среднюю наработку до отказа и гамма-ресурс при $P_\gamma = 0{,}9$.

Задача 9. Наработка элемента до отказа описывается усеченным нормальным распределением с параметрами $t_н = 4000$ ч, $\sigma^2 = 10^6$ ч^2. Определить вероятность безотказной работы, интенсивность отказов и плотность вероятности отказа для $t = 2000$ ч.

Задача 10. Наработка изделия до отказа описывается законом Релея. Определить вероятность безотказной работы, интенсивность отказов и плотность вероятности отказа для $t = 1000$ ч, если параметр распределения $\sigma^2 = 10^6$ ч^2.

Задача 11. Время безотказной работы изделия подчиняется закону Вейбулла с параметрами $k = 10^{-4}$ ч$^{-1}$, $m = 1{,}5$. Определить вероятность безотказной работы, интенсивность отказов и плотность вероятности отказа для $t = 100$ ч.

Задача 12. За наблюдаемый период эксплуатации в изделии было зафиксировано 8 отказов, время восстановления которых составило 12, 23, 15, 9, 17, 28, 25, 31 мин. Найти оценку среднего времени восстановления изделия.

Задача 13. Функция надежности устройства, для которого справедливо распределение Релея, т. е. $P(t) = e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$, изменилась в 1,5 раза за время 1000 ч. Определить параметр данного распределения.

Задача 14. В результате анализа данных об отказах аппаратуры получена зависимость $f(t) = C^1\lambda^1 e^{-\lambda^1 t} + C^2\lambda^2 e^{-\lambda^2 t}$. Определить вероятность безотказной работы, интенсивность отказов и среднюю наработку до отказа.

Задача 15. Плотность вероятности отказа аппаратуры, полученная в результате анализа данных об ее отказах, имеет следующий вид:

$$f(t) = 2e^{-t}(1 - e^{-t}).$$

Определить вероятность отказа, среднюю наработку до отказа и интенсивность отказов при t = 700 часов.

Задача 16. В результате наблюдений получено сто значений наработки на отказ насоса $t_j, j = 1, \ldots, n, n = 100$ (табл. 1.1).

Таблица 1.1

Результаты наблюдений наработки на отказ

№ набл.	t_j, ч	№ набл.	t_j, ч	№ набл.	t_j, ч	№ набл.	t_j, ч	№ набл.	t_j, ч
1	314	21	77	41	35	61	68	81	25
2	249	22	16	42	367	62	18	82	54
3	145	23	95	43	224	63	47	83	16
4	107	24	12	44	128	64	7	84	7
5	85	25	107	45	206	65	8	85	12
6	56	26	225	46	146	66	209	86	70
7	34	27	16	47	79	67	46	87	187
8	22	28	28	48	37	68	5	88	78
9	17	29	32	49	41	69	18	89	154
10	8	30	1	50	63	70	149	90	189
11	8	31	133	51	31	71	32	91	169
12	216	32	17	52	48	72	62	92	49
13	6	13	29	53	6	73	70	93	105
14	26	34	15	54	108	74	125	94	78
15	8	35	19	55	27	75	144	95	101
16	6	36	18	56	43	76	55	96	18
17	49	37	64	57	38	77	4	97	25
18	165	38	294	58	61	78	14	98	27
19	9	39	21	59	4	79	34	99	6
20	370	40	21	60	28	80	368	100	25

Выполнить математическую обработку результатов наблюдений для определения оценок числовых параметров и вида закона распределения случайной величины $t_j, j = 1, \ldots, 100$.

Решение. Поскольку минимальное и максимальное значения результатов наблюдений (табл. 1.1) равны t_{min}1 ч, t_{max}= 370 ч, то диапазон значений случайной величины $t_j, j = 1, \ldots, 100$, составляет $t_{max} - t_{min}$370 − 1 = 369 ч. Этот диапазон разбиваем на равные интервалы величиной

$$\Delta t = \frac{t_{max} - t_{min}}{1 + 2{,}31 \lg n}. \tag{1.14}$$

Если при разбиении на интервалы равной длины, определенной по формуле (1.14), количество значений случайной величины t_j в интервале оказывается меньше 10, то осуществляют разбиение диапазона изменения на интервалы разной длины.

Для каждого интервала определим: количество значений случайной величины n_i, попавших в интервал; относительную частоту (эмпирическую вероятность): $P_i = \frac{n_i}{n} = \frac{n_i}{100}$; середины каждого интервала t_i; произведения $P_i t_i$; эмпирическую плотность вероятности $\frac{n_i}{n\,\Delta t}$; произведения $P_i(t_i - \hat{t}_\text{н})^2$. Результаты расчета запишем в табл. 1.2.

Таблица 1.2

Результаты обработки

№ интервала	Интервал	n_i	P_i	t_i	$P_i\ t_i$	$\frac{n_i}{n\,\Delta t}$	$P_i\ (t_i - \hat{t}_\text{н})^2$
1	0–10	15	0,15	5	0,75	0,015	712,08
2	10–20	14	0,14	15	2,1	0,014	485,69
3	20–30	12	0,12	25	3,0	0,012	286,95
4	30–50	15	0,15	40	6,0	0,0075	172,38
5	50–80	14	0,14	65	9,1	0,0047	11,09
6	80–110	7	0,07	95	6,65	0,0023	31,16
7	110–150	7	0,07	130	9,1	0,0018	220,3
8	150–190	5	0,05	170	8,5	0,0013	461,76
9	190–250	6	0,06	220	13,2	0,001	1280,71
10	250–370	5	0,05	310	15,5	0,0004	2787,16
Σ		**100**	**1,0**		**73,9**		**6449,28**

Оценка средней наработки до отказа определяется по значениям $P_i t_i$из табл. 1.2:

$$\hat{t}_{\text{н}} = \sum_{i=1}^{10} P_i \, t_i = 73{,}9 \text{ ч.}$$

Оценка дисперсии равна

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^{10} [P_i \, (t_i - \hat{t}_{\text{н}})^2] = \sum_{i=1}^{10} [P_i \, (t_i - 73{,}9)^2] = 6449{,}28 \text{ ч}^2.$$

Среднеквадратическое отклонение:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}^2} = \sqrt{6449{,}28} = 80{,}3 \text{ ч.}$$

Среднеквадратическая ошибка определения оценки средней наработки до отказа:

$$\Delta\hat{t}_{\text{н}} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \frac{80.3}{\sqrt{100}} = 8 \text{ ч.}$$

Среднеквадратическая ошибка определения оценки среднеквадратического отклонения:

$$\Delta\hat{\sigma} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{2n}} = \frac{80.3}{\sqrt{200}} \approx 5{,}7 \text{ ч.}$$

Следовательно, $\hat{t}_{\text{н}}$ = (73,9±8) ч.

На гистограмме распределения (рис. 1.17) по оси абсцисс откладывают интервалы разбиения случайной величины t_j, а по оси ординат – значения статистической плотности вероятности $\frac{n_i}{n\,\Delta t}$. По виду гистограммы выдвигают гипотезу о том, что исследуемая случайная величина (наработка на отказ насоса) имеет экспоненциальное распределение. О справедливости этого предположения также свидетельствуют близкие значения оценки средней наработки до отказа $\hat{t}_{\text{н}}$ и оценки среднеквадратического отклонения $\hat{\sigma}$.

Принимая в качестве математического ожидания наработки на отказ его оценку $\hat{t}_{\text{н}}$ = 73,9 ч, получим

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t},$$

где $\hat{\lambda} = \frac{1}{\hat{t}_н}$ = 0,0135 ч$^{-1}$, т. е.

$$f(t) = 0{,}0135e^{-0{,}0135t}.$$

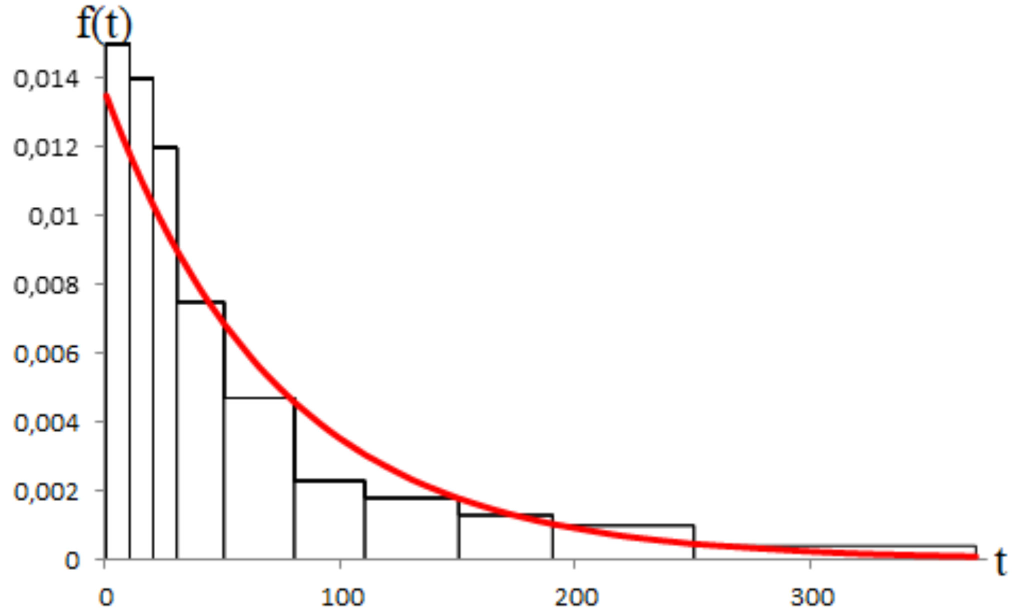

Рис. 1.19. Гистограмма наработки на отказ и плотность вероятности

Для проверки соответствия эмпирического и гипотетического законов распределения, т. е. справедливости гипотезы об экспоненциальном законе распределения наработки на отказ насоса, используют критерий χ^2 (критерий согласия Пирсона):

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{[n_i - nP^*(t_i)]^2}{nP^*(t_i)},$$

где k – количество интервалов группировки статистического распределения (в примере k = 10), $P^*(t_i)$ – вероятность попадания случайной величины в i-й интервал.

Результаты расчета вероятности в соответствии с проверяемым законом распределения:

$$P^*(t_i < t < t_{i+1}) = F(t_{i+1}) - F(t_i),$$

где $F(t_i)$ – функция распределения на i-м интервале. Значения $P^*(t_i)$ а также статистика критерия согласия Пирсона приведены в табл. 1.3.

Таблица 1.3

Результаты расчета статистики критерия согласия Пирсона

№	t_i	$e^{-0.0135t_i}$	$P^*(t_i)$	$nP^*(t_i)$	$\frac{[n_i - nP^*(t_i)]^2}{nP^*(t_i)}$
1	0	1	–	–	–
2	10	0,874	0,126	12,6	0,457
3	20	0,763	0,111	11,1	0,758
4	30	0,667	0,096	9,6	0,600
5	50	0,509	0,158	15,8	0,041
6	80	0,340	0,169	16,9	0,498
7	110	0,227	0,113	11,3	1,636
8	150	0,132	0,095	9,5	0,658
9	190	0,077	0,055	5,5	0,045
10	250	0,034	0,043	4,3	0,672
11	370	0,007	0,027	2,7	1,959
Σ					**7,324**

Распределение χ^2 зависит от числа степеней свободы $f = k - m - 1$, где m – количество параметров, оцениваемых по выборке. Для экспоненциального распределения $m = 1$, а для нормального распределения $m = 2$.

Табулированные значения χ^2-распределения в зависимости от f и P приведены в прил. 2. По рассчитанному значению $\chi^2 = 7{,}324$ и числу степеней свободы $f = 10 - 2 = 8$ из прил. 2 находим вероятность $P = 0{,}55$. Полученное значение вероятности свидетельствует о том, что гипотеза об экспоненциальном законе распределения времени безотказной работы подтверждается критерием согласия Пирсона.

К наиболее простым и распространенным критериям проверки гипотезы о виде закона распределения относится также критерий Колмогорова.

Статистика Колмогорова представляет собой максимальное отклонение эмпирической функции распределения $\hat{F}(t)$ от гипотетической (т. е. соответствующей теоретической) функции распределения $F(t)$:

$$D = \max\left|\hat{F}(t) - F(t)\right|,$$

где теоретическая функция распределения (экспоненциальная) имеет вид

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-0{,}0135t}.$$

Результаты расчета величины D приведены в табл. 1.4. Из табл. 1.4 видно, что D = 0,077. Определяем величину

$$\lambda = D\sqrt{n} = 0{,}077 \cdot 10 = 0{,}77$$

и из прил. 3 находим вероятность $P(\lambda)$ = 0,6.

Следовательно, гипотеза об экспоненциальном законе распределения наработки на отказ насоса подтверждается также и критерием Колмогорова, поскольку найденное значение вероятности не мало.

Таблица 1.4

Результаты расчета статистики Колмогорова

№ интер-вала	интервал	n_i	$\hat{F}(t) = \sum \frac{n_i}{n}$	$F(t)$	$\lvert\hat{F}(t) - F(t)\rvert$
1	0–10	15	0,15	0,126	0,024
2	10–20	14	0,29	0,237	0,053
3	20–30	12	0,41	0,333	0,077
4	30–50	15	0,56	0,491	0,069
5	50–80	14	0,7	0,660	0,04
6	80–110	7	0,77	0,773	0,003
7	110–150	7	0,84	0,868	0,028
8	150–190	5	0,89	0,923	0,033
9	190–250	6	0,95	0,966	0,016
10	250–370	5	1,0	0,993	0,007
D					**0,077**

Задача 17. Выполнить математическую обработку статистических данных по пробегу (наработке на отказ) полимеризатора t_j, $j = 1, \dots, n, n = 105$ (табл. 1.5), т. е. определить закон распределения случайной величины и ее числовые характеристики.

Таблица 1.5

Статистические данные по наработке на отказ

№ набл.	t_j, ч	№ набл.	t_j, ч	№ набл.	t_j, ч	№ набл.	t_j, ч	№ набл.	t_j, ч
1	134	22	121	43	149	64	137	85	71
2	122	23	94	44	124	65	208	86	143
3	165	24	124	45	142	66	104	87	107
4	151	25	105	46	110	67	88	88	79
5	162	26	133	47	114	68	105	89	120
6	159	27	98	48	141	69	118	90	90
7	84	28	167	49	226	70	110	91	111
8	91	29	153	50	130	71	131	92	126
9	134	30	133	51	105	72	112	93	144
10	156	31	194	52	120	73	107	94	126
11	132	32	104	53	195	74	161	95	112
12	92	13	101	54	110	75	112	96	146
13	141	34	158	55	143	76	209	97	149
14	121	35	121	56	127	77	73	98	151
15	58	36	147	57	101	78	161	99	111
16	124	37	155	58	113	79	64	100	116
17	44	38	75	59	74	80	179	101	125
18	109	39	194	60	63	81	138	102	162
19	106	40	99	61	118	82	143	103	190
20	103	41	161	62	136	83	115	104	124
21	127	42	106	63	148	84	209	105	138

Примечание: при решении данной задачи принимаем гипотезу о нормальном законе распределения наработки на отказ.

Задача 18. Из 50 одновременно испытываемых изделий за первые 500 ч непрерывной работы получены следующие данные:

– на интервале от 0 до 100 ч отказало 0 изделий;

– на интервале от 100 до 200 ч отказало 1 изделие;

– на интервале от 200 до 300 ч отказало 0 изделий;

– на интервале от 300 до 400 ч отказало 0 изделий;

– на интервале от 400 до 500 ч отказало 2 изделия.

Определить вероятность безотказной работы изделий в течение 500 ч.

Задача 19. В процессе испытаний 1000 невосстанавливаемых изделий с интервалом 100 ч осуществлялась фиксация количества отказов на соответствующем интервале. Данные об отказах приведены в табл. 1.6. Определить вероятность безотказной работы изделий в течение 1000 ч и среднюю наработку на отказ.

Таблица 1.6

Данные об отказах изделий

№ интервала	интервал	n_i
1	0–100	30
2	100–200	15
3	200–300	12
4	300–400	15
5	400–500	24
6	500–600	17
7	600–700	10
8	700–800	15
9	800–900	26
10	900–1000	25

Задача 20. За время наблюдений за работой трех однотипных изделий зафиксировано 5 отказов первого изделия, 7 отказов второго, 10 отказов третьего изделия. Наработка на отказ первого изделия – 5000 ч, второго – 6500 ч, третьего – 4900 ч. Определить среднюю наработку на отказ.

Решение. Суммарное время работы трех изделий

$$t_\Sigma = 5000 + 6500 + 4900 = 16400 \text{ ч.}$$

Суммарное количество отказов: $n = 5 + 7 + 10 = 22$.

Средняя наработка на отказ

$$\hat{t}_\text{н} = \frac{t_\Sigma}{n} = \frac{16400}{22} \approx 745 \text{ ч.}$$

Задача 21. Наработка на отказ изделия распределена по закону Вейбулла с параметрами $k = 10^{-4}$ ч$^{-1}$, $m = 1{,}4$, время работы – 200 ч. Определить вероятность безотказной работы, плотность вероятности отказа, а также среднюю наработку на отказ.

Задача 22. Наработка на отказ изделия подчинена закону распределения Релея с параметром σ = 600 ч. Определить вероятность безотказной работы, плотность вероятности отказа, интенсивность отказа изделия для t = 800 ч, а также среднюю наработку на отказ.

Задача 23. Среднее число отказов восстанавливаемого устройства за время t = 1000 ч равно $n_{\text{ср}}$ = 10. Требуется определить вероятность того, что за время работы 200 ч возникнет 2, 3 отказа.

Решение. Интенсивность потока отказов следующая:

$$\hat{\lambda} = \frac{n_{\text{ср}}}{t} = \frac{10}{1000} = 0{,}01\ \text{ч}^{-1}.$$

Вероятность того, что за время t ч возникнет K отказов согласно распределению Пуассона

$$P_K(t) = \frac{(\lambda \cdot t)^K}{K!} e^{-\lambda t}.$$

Следовательно, вероятность возникновения двух отказов за время работы 200 ч:

$$P_{K=2}(t) = \frac{(0{,}01 \cdot 200)^2}{1 \cdot 2} e^{-0{,}01 \cdot 200} = \frac{2^2}{2} e^{-2} = 0{,}27.$$

Вероятность того, что за время работы 200 ч произойдет 3 отказа:

$$P_{K=3}(t) = \frac{(0{,}01 \cdot 200)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} e^{-0{,}01 \cdot 200} = \frac{2^3}{6} e^{-2} = 0{,}18.$$

Задача 24. Наработка на отказ изделия распределена по усеченному нормальному закону с параметрами $t_{\text{н}}$ = 5000 ч, σ = 2000 ч. Определить вероятность безотказной работы изделия для t = 4000 ч.

Примечание. Вероятность безотказной работы, согласно усеченному нормальному распределению, имеет вид

$$P(t) = \frac{F_0\left(\frac{t_{\text{н}} - t}{\sigma}\right)}{F_0\left(\frac{t_{\text{н}}}{\sigma}\right)},$$

где $F_0(t)$ – табулированный интеграл Лапласа, значения которого приведены в прил. 4.

Задача 25. Плотность распределения времени безотказной работы изделия имеет вид

$$f(t) = 2\lambda e^{-\lambda t}\left(1 - e^{-\lambda t}\right).$$

Определить вероятность отказа, интенсивность отказа и среднюю наработку до отказа изделия.

Задача 26. Плотность распределения наработки до отказа имеет вид

$$f(t) = C_1\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}.$$

Определить аналитическое выражение для вероятности безотказной работы, интенсивности отказов и средней наработки до отказа.

Задача 27. Доказать, что если плотность распределения наработки между отказами имеет вид

$$f(t) = C_1\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2\lambda_2 e^{-\lambda_2 t},$$

то существует установившееся значение интенсивности отказов, равное $\min(\lambda_1, \lambda_2)$.

Задача 28. Интенсивность отказов объекта управления имеет вид

$$\lambda(t) = \frac{k^2 t}{1 + kt}.$$

Требуется определить вероятность безотказной работы, плотность распределения наработки на отказ и среднюю наработку до отказа объекта управления.

Задача 29. Вероятность отказа изделия на интервале времени T равна p. Известно, что при $t < T$ изделие не отказало. Необходимо определить вероятность P того, что изделие откажет на оставшемся промежутке времени.

Решение. Вероятность p возникновения отказа за время T:

$$p = \frac{t}{T}p + \left(1 - \frac{t}{T}p\right) \cdot P,$$

где $\frac{t}{T}p$ – вероятность отказа за время t; $1-\frac{t}{T}p$ – вероятность отсутствия отказа за время t; $\left(1-\frac{t}{T}p\right)\cdot P$ – вероятность отказа за оставшееся время.

Следовательно, искомая вероятность

$$P=\frac{\left(1-\frac{t}{T}\right)p}{1-\frac{t}{T}p}.$$

Задача 30. Вероятность превышения номинального напряжения в электрической цепи равна q_1. При повышенном напряжении вероятность отказа прибора, являющегося потребителем электрического тока, равна q_2. Определить вероятность отказа прибора вследствие повышения напряжения.

Задача 31. Построить графики зависимости $Q(t), f(t), \lambda(t)$ распределения Вейбулла с параметрами k = 0,00015 ч$^{-1}$, m = 0,5; 1; 2; 3. Сравнить полученные зависимости.

1.3. Задачи по теме «Определение комплексных показателей надежности восстанавливаемых элементов»

Задача 1. Интенсивность отказов технического элемента равна 0,005 ч$^{-1}$, а его среднее время восстановления составляет 50 ч. Определить коэффициент готовности и коэффициент оперативной готовности при t = 100 ч и t = 300 ч.

Задача 2. Технический элемент характеризуется средней наработкой до отказа 200 ч и средним временем восстановления 70 ч. Найти коэффициент простоя и гамма-ресурс готовности при K_γ = 0,5.

Задача 3. Среднее время простоя технического элемента составляет 30 ч, среднее время восстановления – 50 ч, а коэффициент готовности – 0,6. Определить коэффициент технического использования, среднюю наработку до отказа и вероятность отказа элемента к моменту времени 100 ч.

Задача 4. Коэффициент простоя технического элемента равен 0,35, коэффициент технического использования – 0,55, а интенсивность восстановления – 0,02 ч$^{-1}$. Требуется определить среднее время простоя элемента, его гамма-ресурс при $P_\gamma = 0{,}7$ и коэффициент оперативной готовности при времени прогноза 100 ч.

Задача 5. Коэффициент оперативной готовности элемента равен 0,7 при $t = 100$ ч, а его гамма-ресурс составляет 80 ча при $P_\gamma = 0{,}8$. Требуется определить среднюю наработку до отказа, среднее время восстановления и коэффициент простоя.

Задача 6. Система «восстанавливаемый элемент – ремонтный персонал» характеризуется коэффициентом простоя 0,2 и коэффициентом оперативной готовности 0,2 при $t = 400$ ч. Определить интенсивности отказов и восстановления, а также коэффициент готовности элемента.

Задача 7. В результате испытаний 50 восстанавливаемых изделий в течение 1000 ч получено значение интенсивности отказов $\hat{\lambda} = 10^{-4}$ ч$^{-1}$. Закон распределения наработки на отказ – экспоненциальный. Случайная величина – время восстановления в ходе испытаний принимает значение $t_1^{\text{в}} = 2$ ч с вероятностью $P_1 = 0{,}7$, значение $t_2^{\text{в}} = 2$ ч с вероятностью $P_2 = 0{,}3$ и значение $t_3^{\text{в}} = 3{,}2$ ч с вероятностью $P_3 = 0{,}4$. Требуется определить вероятность безотказной работы в течение 1000 ч, среднюю наработку на отказ, среднее время восстановления и коэффициент готовности.

Примечание. Для определения среднего времени восстановления используем формулу

$$\hat{t}_{\text{н}}^{\text{в}} = \sum_{i=1}^{3} t_i^{\text{в}} P_i.$$

Задача 8. К началу наблюдений за отказами приемник проработал 450 ч. К концу наблюдения наработка на отказ составила 2827 ч. За время наблюдений зафиксировано 5 отказов, среднее время восстановления составило 1,2 ч. Определить среднюю наработку на отказ и коэффициент готовности приемника.

Задача 9. При эксплуатации изделия в течение одного года его суммарная наработка на отказ составила 7500 ч, суммарное время восстановления – 420 ч, суммарное время технического обслуживания – 840 ч. Определить коэффициент технического использования.

Задача 10. В табл. 1.7 приведены данные по количеству отказов, значения наработки между соседними отказами и времени восстановления по каждому из пяти экземпляров аппаратуры. Требуется определить среднюю наработку на отказ и коэффициент готовности одного экземпляра.

Таблица 1.7

Данные по наработке на отказ и времени восстановления

№ экземпляра	t_j	$t_j^в$	t_j	$t_j^в$	t_j	$t_j^в$	t_j	$t_j^в$	t_j	$t_j^в$
1	21	0,8	44	0,95	49	0,7	32	1,25	42	0,77
2	36	0,9	56	0,7	53	1,2	28	1	21	0,85
3	45	1,1	61	1,2	47	0,99	41	0,99	35	1,15
4	55	1,2	34	0,92	57	1,11	51	1,2	55	0,99
5	41	1,0	28	1,1	39	0,88	23	1,1	33	1,1

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ НЕРЕЗЕРВИРОВАННЫХ СИСТЕМ

2.1. Методические указания по теоретической части

Система состоит из двух или более элементов, взаимодействующих между собой для достижения заданной цели. *Основным* называется такой элемент системы, отказ которого приводит к отказу всей системы. *Избыточным* или *резервным* называется элемент, отказ которого не приводит к отказу системы.

Система, состоящая только из основных элементов, называется *нерезервированной* или *безызбыточной*. Система, содержащая избыточные элементы, называется *резервированной* или *избыточной*.

При исследовании надежности систем наглядным является графический метод, основанный на построении структурной схемы надежности. Структурной схемой при расчете надежности называется графическое отображение элементов системы, позволяющее однозначно определить состояние системы (работоспособное или неработоспособное) по состоянию элементов. Элементы системы на структурной надежностной схеме изображаются прямоугольниками, на которых указываются их номера или определяющие показатели надежности, например P(t), λ, $t_{\text{н}}$ и т. д. На такой схеме на линиях связи не проставляются стрелки, так как формально здесь нет передачи сигналов.

Структурная надежностная схема нерезервированной системы представляет собой последовательное соединение элементов (рис. 2.1).

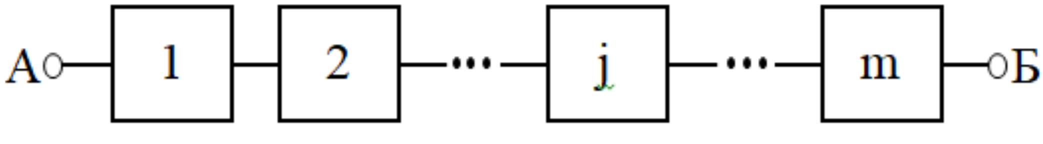

Рис. 2.1. Структурная надежностная схема нерезервированной системы из m элементов

Примером безызбыточной системы является ПИ-регулятор с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = C_1 + \frac{C_0}{p},$$

где x, y – входной и выходной сигналы регулятора, C_0 и C_1 – параметры настройки. Данный регулятор состоит из трех элементов: усилителя П, интегратора И, сумматора Σ (рис. 2.2).

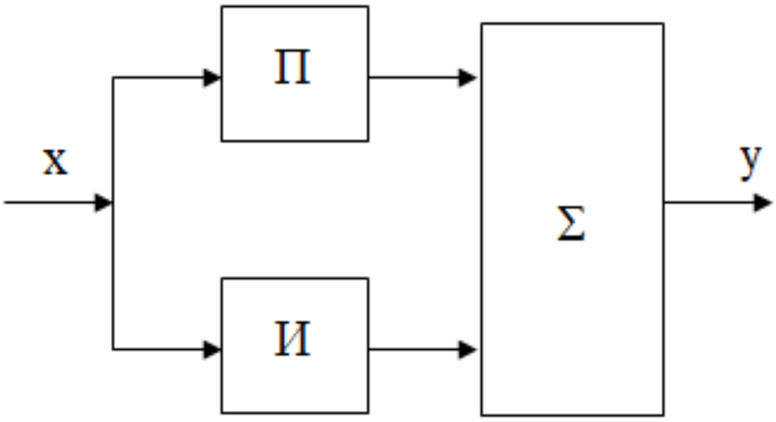

Рис. 2.2. ПИ-регулятор как безызбыточная система

Отказ типа «обрыв» или «короткое замыкание» любого элемента ведет к отказу регулятора, превращая его из ПИ-регулятора в И- или П-регулятор, или к разрыву цепи *x*–*y*. Следовательно, ПИ-регулятор является нерезервированной системой, и его структурная надежностная схема представляет собой последовательное соединение трех элементов (рис. 2.3). Данный пример свидетельствует, что структурная надежностная схема может отличаться от функциональной схемы системы.

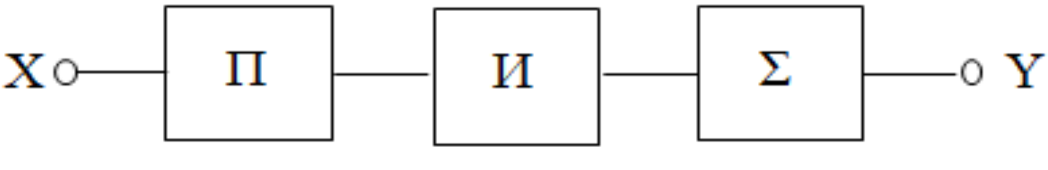

Рис. 2.3. Структурная надежностная схема ПИ-регулятора

Каждый элемент системы характеризуется показателями надежности

$$P_j(t), Q_j(t), f_j(t), \lambda_j(t), t_{\text{н}j}, \sigma_j^2, t_j, t_{j\text{в}}, j = 1, \dots, m,$$

где m – число элементов. Надежность всей системы описывается аналогичными взаимосвязанными показателями.

Задача анализа безызбыточной системы состоит в определении ее показателей $P_c(t)$, $f_c(t)$, $\lambda_c(t), t_{\text{н}}^c$ по известным характеристикам надежности элементов $P_i(t), f_i(t),\ \lambda_i(t),\ i = 1, \dots, m$.

Предполагая, что отказы элементов системы являются независимыми событиями, вероятность безотказной работы системы определяют как вероятность произведения независимых событий. Функция надежности нерезервированной системы

$$P_c(t) = P_1(t) \cdot P_2(t) \cdot \dots \cdot P_m(t) = \prod_{j=1}^{m} P_j(t). \tag{2.1}$$

Поскольку функции надежности элементов равны

$$P_i(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda_i(\tau) d\tau\right), \tag{2.2}$$

то, подставляя (2.2) в (2.1), получим

$$P_c(t) = \prod_{i=1}^{m} \exp\left(-\int_0^t \lambda_i(\tau) d\tau\right) = \exp\left(-\int_0^t \lambda_c(\tau) d\tau\right),$$

где $\lambda_c(t)$ – интенсивность отказов системы.

При известной $P_c(t)$ остальные показатели надежности системы находятся по следующим формулам:

$$Q_c(t) = 1 - P_c(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda_c(\tau) d\tau\right),$$

$$f_c(t) = \frac{dQ_c(t)}{dt} = -\frac{dP_c(t)}{dt} = \lambda_c(t) \exp\left(-\int_0^t \lambda_c(\tau) d\tau\right),$$

$$\lambda_c(t) = \frac{f_c(t)}{P_c(t)} = -\frac{P_c'(t)}{P_c(t)} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(t)\,,$$

$$t_{\text{н}}^{c} = \int_0^\infty P_c(t)dt = \int_0^\infty \exp\left(-\int_0^t \lambda_c(\tau)d\tau\right)dt\,,$$

$$\sigma_c^2 = \int_0^\infty (t - t_{\text{н}}^{c})^2 \cdot f_c(t)dt,$$

$$t_{\gamma c} = \arg\bigl(P_c(t) \geq P_{\gamma c}\bigr)\,,\quad 0 < P_{\gamma c} < 1.$$

Если наработка до отказа элементов имеет экспоненциальное распределение

$$P_i(t) = e^{-\lambda_i t},\quad i = 1, \dots, m,$$

то для системы также справедливо экспоненциальное распределение

$$P_c(t) = \prod_{i=1}^{m} e^{-\lambda_i t} = e^{-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i t} = e^{-\lambda_c t},$$

$$f_c(t) = \lambda_c e^{-\lambda_c t},$$

$$\lambda_c = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathrm{t}\,,$$

$$t_{\text{н}}^{c} = \int_0^\infty e^{-\lambda_c t}\,dt = \frac{1}{\lambda_c} = \left(\frac{1}{t_{\text{н}1}} + \frac{1}{t_{\text{н}2}} + \cdots + \frac{1}{t_{\text{н}m}}\right)^{-1},$$

где $t_{\text{н}i} = \frac{1}{\lambda_i}$ – средняя наработка до отказа i-го элемента.

При равнонадежных элементах с $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = \lambda$ получим

$$P_c(t) = e^{-m\lambda t},\quad Q_c(t) = 1 - e^{-m\lambda t},$$

$$f_c(t) = m\lambda e^{-m\lambda t},$$

$$t_{\text{н}}^{c} = \frac{1}{m\lambda} = \frac{t_{\text{н}}}{m}, \tag{2.3}$$

где $t_{\text{н}}$ – средняя наработка до отказа элемента.

Сохранение системой вида закона распределения наработки до отказа элементов справедливо не только для экспоненциального распределения, но и для некоторых неэкспоненциальных распределений наработки элементов. Например, если для элементов системы справедливо распределение Вейбулла, то наработка всей системы также подчинена распределению Вейбулла:

$$P_c(t) = \prod_{i=1}^{n} e^{-(k_i t)^m} = e^{-\sum_{i=1}^{n}(k_i t)^m} = e^{-(kt)^m},$$

$$t_{\text{н}}^{c} = \frac{1}{k}\Gamma\left(1+\frac{1}{m}\right) = \Gamma\left(1+\frac{1}{m}\right)/\left(\sum_{i=1}^{n} k_i^m\right)^{1/m},$$

где $k = \left(\sum_{i=1}^{n} k_i^m\right)^{1/m}$ – параметр распределения наработки до отказа системы.

При одинаковых элементах с параметром распределения k получим

$$t_{\text{н}}^{c} = \Gamma\left(1+\frac{1}{m}\right)/\left(\sum_{i=1}^{n} k^m\right)^{1/m} = \frac{1}{k}\Gamma\left(1+\frac{1}{m}\right)/n^{1/m} = t_{\text{н}}/n^{1/m}.$$

Следовательно, надежность нерезервированной системы с увеличением количества элементов m уменьшается. Из формулы (2.3) следует, что средняя наработка до отказа безызбыточной системы, состоящей из равнонадежных элементов с экспоненциальным распределением наработки до отказа, обратно пропорциональна количеству элементов.

Таким образом, надежность нерезервированной системы всегда меньше надежности каждого элемента системы, в том числе самого ненадежного элемента.

Анализ полученных формул свидетельствует, что повышение надежности нерезервированной системы возможно следующими способами:

– уменьшить количество элементов системы;

– применять равнонадежные элементы;

– заменить наименее надежный элемент на более надежный;

– использовать при конструировании системы более надежные элементы.

Расчетные формулы для системных показателей надежности зависят от вида моделей безотказности, восстанавливаемости, контроля и диагностирования. Марковская модель надежности базируется на следующих допущениях: наработка на отказ и время восстановления элементов имеют экспоненциальное распределение с параметрами λ_i и $\mu_i, i = 1, \ldots, m$; отказы элементов являются независимыми событиями; в системе реализован идеальный контроль работоспособности, позволяющий мгновенно обнаруживать все возникающие отказы элементов.

Модель 1. Нагруженный режим, неограниченное восстановление

При допущениях о нагруженном режиме функционирования элементов (во время восстановления работоспособности системы при отказе элемента он отправляется в ремонт, остальные работоспособные элементы не отключаются) и неограниченном восстановлении (имеется m ремонтных бригад, т. е. возможность параллельного ремонта всех отказавших элементов) получим, что по теореме умножения для независимых событий функция готовности системы определяется выражением:

$$K_{\text{г}c}(t) = \prod_{i=1}^{m} K_{\text{г}i}(t). \tag{2.4}$$

Подставляя в (2.4) выражение для функции готовности (1.9), получим

$$K_{\text{г}c}(t) = \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} + \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} e^{-(\lambda_i + \mu_i)t} \right).$$

Следовательно, коэффициент готовности и коэффициент оперативной готовности системы равны

$$K_{\text{г}c} = \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} \right), \tag{2.5}$$

$$K_{\text{огс}}(t) = \prod_{i=1}^{m}\left(\frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}\right) e^{-\lambda_{\text{с}} t},\ \lambda_{\text{с}} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i.$$

Выражая среднее время восстановления через коэффициент готовности и учитывая (2.5), получим

$$\boldsymbol{t}_{\text{нс}}^{\text{в}} = \boldsymbol{t}_{\text{н}}^{\text{с}} \left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{K}_{\text{гс}}} - \mathbf{1}\right) = \left(\prod_{i=1}^{m}\left(\mathbf{1} + \frac{\boldsymbol{\lambda}_i}{\boldsymbol{\mu}_i}\right) - \mathbf{1}\right) / \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{\lambda}_i. \tag{2.6}$$

Из (2.6) следует, что среднее время восстановления системы также является комплексным показателем надежности, поскольку зависит от показателей безотказности и ремонтопригодности элементов.

Модель 2. Нагруженный режим, одна ремонтная бригада

При допущениях, что в ремонтном органе имеется только одна ремонтная бригада (в ремонте может находиться только один элемент), интенсивности отказов и восстановления всех элементов одинаковы: $\lambda_i = \lambda, \mu_i = \mu, i = 1, \dots, m$, система может находиться в одном из m+1 состояний:

– 0 – все элементы работоспособны;

– 1 – один из элементов неработоспособен и находится в ремонте, остальные элементы работоспособны и находятся в нагруженном режиме;

– 2 – два элемента неработоспособны, один из них находится в ремонте, другой – в ожидании обслуживания, остальные элементы работоспособны и находятся в нагруженном режиме;

– ...

– m – все m элементов неработоспособны, один из них находится в ремонте, остальные – в очереди на обслуживание.

Граф состояний нерезервированной системы при нагруженном режиме и одной ремонтной бригаде представлен на рис. 2.4.

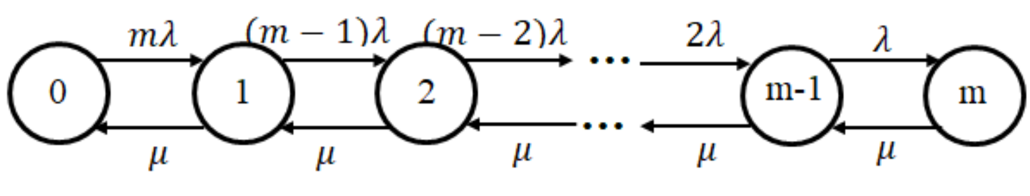

Рис. 2.4. Граф состояний нерезервированной системы при нагруженном режиме и одной ремонтной бригаде

В соответствии с графом состояний система алгебраических уравнений Колмогорова имеет вид

$$\begin{cases} -m\lambda p_0 + \mu p_1 = 0, \\ (m-i+1)\lambda p_{i-1} - \big((m-i)\lambda + \mu\big)p_i + \mu p_{i+1} = 0, i = 1, \dots, m \\ \lambda p_{m-1} - \mu p_m = 0, \\ p_0 + p_1 + \dots + p_m = 1, \end{cases} \quad (2.7)$$

где p_i – стационарная вероятность нахождения системы в i-м состоянии. Решая систему уравнений (2.7), получим коэффициент готовности системы:

$$K_{\text{гс}} = p_0 = 1 / \sum_{i=0}^{m} A_m^i \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i, \quad (2.8)$$

где $A_m^i = \frac{m!}{(m-i)!}$ – число размещений из m по i элементов.

Сравнение формул для коэффициента готовности (2.5) и (2.8) свидетельствует о том, что сокращение числа ремонтных бригад с m в первой модели до одной во второй модели приводит к уменьшению коэффициента готовности.

Модель 3. Ненагруженный режим, одна ремонтная бригада

При допущениях о ненагруженном режиме функционирования элементов (работоспособные элементы после отказа системы отключаются до устранения отказа и поэтому не отказывают) и наличии в ремонтном органе только одной ремонтной бригады система может находиться в одном из m+1 состояний:

– 0 – все элементы работоспособны;

– 1 – первый элемент неработоспособен и находится в ремонте, остальные элементы отключены;

– ...

– m – m-й элемент неработоспособен и находится в ремонте, остальные элементы отключены.

Граф состояний безызбыточной системы при ненагруженном режиме и одной ремонтной бригаде представлен на рис. 2.5.

Система алгебраических уравнений Колмогорова согласно графу состояний имеет вид

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{\lambda_i p_0} - \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{\mu_i p_i} = \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\lambda_i p_0 - \mu_i p_i = 0, i = 1, \dots, m}, \\ \boldsymbol{p_0 + p_1 + \cdots + p_m = 1}. \end{cases} \tag{2.9}$$

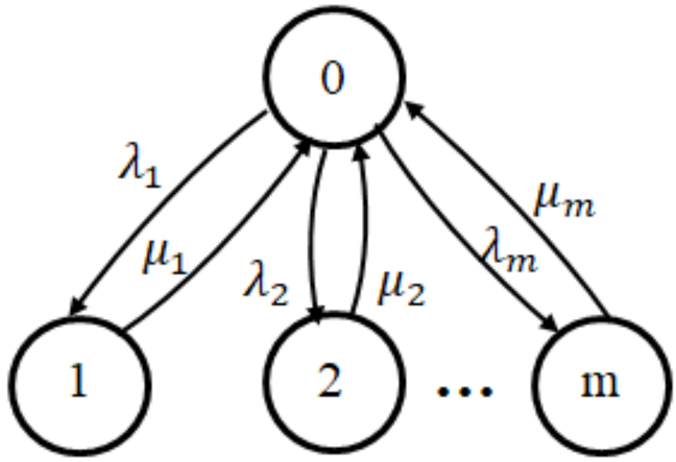

Рис. 2.5. Граф состояний безызбыточной системы при ненагруженном режиме и одной ремонтной бригаде

Значение коэффициента готовности находим из системы уравнений (2.9):

$$K_{\text{г}c} = p_0 = 1/\sum_{i=1}^{m}\left(1 + \frac{\lambda_i}{\mu_i}\right). \tag{2.10}$$

Среднее время восстановления системы равно

$$\boldsymbol{t_{\text{нс}}^{\text{в}} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{\mu_i} / \sum_{i=1}^{m} \lambda_i, = \sum_{i=1}^{m} t_{\text{н}i}^{\text{в}}\, \lambda_i/\lambda_c}.$$

Согласно данной модели, среднее время восстановления системы, как и в модели 1, является комплексным показателем надежности, так как зависит от показателей безотказности и ремонтопригодности элементов.

Сравнение (2.5) и (2.10) показывает, что ненагруженный режим элементов во время ремонта по сравнению с нагруженным режимом увеличивает коэффициент готовности, несмотря на меньшее количество ремонтных бригад.

Модель 4. Ненагруженный режим, одна ремонтная бригада, неидеальный контроль

Согласно данной модели, в элементе могут быть скрытые отказы. Пусть β_i – доля скрытых отказов в i-м элементе, α_i – доля обнаруживаемых системой контроля отказов в i-м элементе; время задержки обнаружения скрытых отказов имеет экспоненциальное распределение с параметром ν_i. Система может находиться в одном из $2m$+1 состояний:

– 0 – все элементы работоспособны;

– 1, 2, …, m – в соответствующем элементе произошел скрытый отказ;

– m+1, m+2, …, $2m$ – отказ элемента обнаружен, и он находится в ремонте.

Граф состояний системы для модели 4 представлен на рис. 2.6.

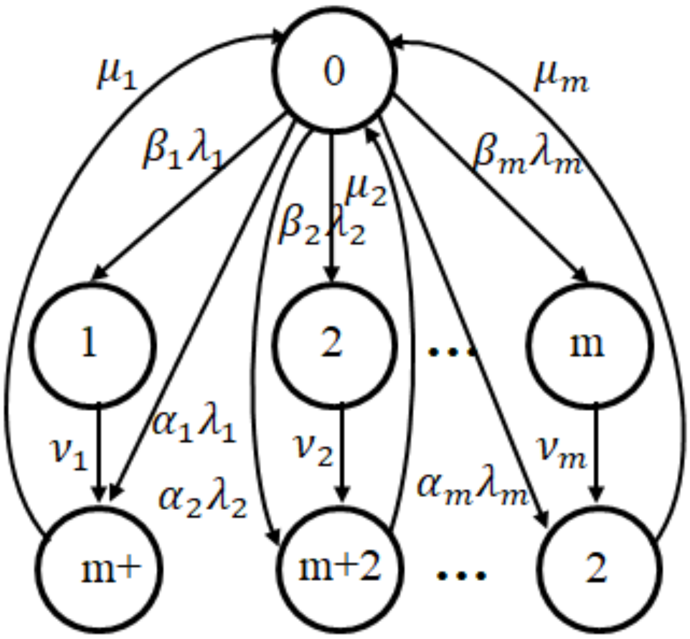

Рис. 2.6. Граф состояний нерезервированной системы при ненагруженном режиме, неидеальном контроле и одной ремонтной бригаде

Система алгебраических уравнений Колмогорова относительно стационарных вероятностей состояний системы в соответствии с графом имеет вид

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^{m}\lambda_i p_0 - \sum_{i=1}^{m}\mu_i p_{m+i} = 0, \\ \beta_i\lambda_i p_0 - \nu_i p_i = 0, i = 1, \dots, m, \\ \nu_i p_i + \alpha_i\lambda_i p_0 - \mu_i p_{m+i} = 0, i = 1, \dots, m, \\ p_0 + p_1 + \dots + p_m = 1. \end{cases}$$

Из полученной системы уравнений находим коэффициент готовности системы:

$$K_{\text{г}c} = p_0 = 1 \Big/ \left(1 + \sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda_i}{\mu_i}\left(1 + \beta_i\frac{\mu_i}{\nu_i}\right)\right).$$

Коэффициент контролируемой готовности системы:

$$K_{\text{кг}c} = \sum_{i=1}^{m} p_i = \frac{1 + \sum_{i=1}^{m}\beta_i\frac{\lambda_i}{\nu_i}}{1 + \sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda_i}{\mu_i}\left(1 + \beta_i\frac{\mu_i}{\nu_i}\right)}.$$

Коэффициент оперативной готовности системы равен

$$K_{\text{ог}c}(t) = e^{-\lambda_\text{с}t} \Big/ \left(1 + \sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda_i}{\mu_i}\left(1 + \beta_i\frac{\mu_i}{\nu_i}\right)\right), \lambda_\text{с} = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i.$$

Среднее время восстановления системы равно

$$t_{\text{нс}}^{\text{в}} = t_{\text{н}}^{\text{с}}\left(\frac{1}{K_{\text{г}c}} - 1\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\lambda_i}{\mu_i\lambda_\text{с}} + \beta_i\frac{\lambda_i}{\nu_i\lambda_\text{с}}\right).$$

Полученный результат свидетельствует о том, что в четвертой модели среднее время восстановления системы также является комплексным показателем надежности.

Модель 5. Полумарковская модель, ненагруженный режим, идеальный контроль, одна ремонтная бригада

В отличие от марковской модели 3, в данной модели предполагается, что время восстановления элемента имеет произвольное распределение $F_{\text{в}i}(t)$. Граф состояний аналогичен и содержит m+1 состояний (рис. 2.5). Стационарные вероятности состояний полумарковского процесса определяются по формуле

$$\boldsymbol{p_i = \pi_i \tau_i / \sum_{j=0}^{m} \pi_j \tau_j \,, \pi_i = \sum_{j=0}^{m} \pi_j p_{ji},}$$

где π_i – стационарные вероятности состояний вложенной марковской цепи; τ_i – среднее время пребывания процесса в i-м состоянии; p_{ji} – вероятности перехода из j-го в i-е состояние. В соответствии с графом состояний стационарные вероятности для вложенного марковского процесса вычисляются из системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} \pi_i = \pi_0 p_{0i}, i = 1, \dots, m, \\ \pi_0 = \sum_{i=1}^{m} \pi_i, \\ \sum_{i=0}^{m} \pi_i = 1. \end{cases} \tag{2.11}$$

Решение системы уравнений (2.11) с учетом

$$\boldsymbol{\tau_0 = \frac{1}{\lambda_\text{с}}, p_{0i} = \frac{\lambda_i}{\lambda_\text{с}}, i = 1, \dots, m, \tau_i = t^\text{в}_{\text{н}i} = \int_0^\infty (1 - F_{\text{в}i}(t)) dt, i = 1, \dots, m}$$

имеет вид

$$\pi_0 = \frac{1}{2}, \quad \pi_i = \frac{\lambda_i}{2\lambda_c}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Следовательно, коэффициент готовности и коэффициент оперативной готовности равны

$$K_{\text{г}c} = p_0 = 1/\left(1 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i t_{\text{н}i}^{\text{в}}\right),$$

$$K_{\text{ог}c}(t) = e^{-\lambda_c t}/\left(1 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i t_{\text{н}i}^{\text{в}}\right).$$

Среднее время восстановления системы находится по формуле

$$\boldsymbol{t}_{\text{нс}}^{\text{в}} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\boldsymbol{\lambda_i t_{\text{н}i}^{\text{в}}}}{\boldsymbol{\lambda}_{\text{с}}}.$$

Модель 6. Полумарковская модель, ненагруженный режим, неидеальный контроль, одна ремонтная бригада

Пусть β_i – доля скрытых отказов в i-м элементе; время задержки обнаружения скрытых отказов имеет произвольное распределение $F_{\text{з}i}(t)$, время восстановления элемента имеет распределение $F_{\text{в}i}(t)$. Граф состояний модели имеет $2m+1$ состояний (рис. 2.6). Стационарные вероятности для вложенного марковского процесса в соответствии с графом состояний находятся из системы алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \pi_0 = \sum_{i=1}^{m} \pi_{m+i}, \\ \pi_i = \pi_0 p_{0i}, i = 1, \dots, m, \\ \pi_{m+i} = \pi_i + \pi_0 p_{0,m+i}, i = 1, \dots, m, \\ \sum_{i=0}^{m} \pi_i = 1. \end{cases} \tag{2.12}$$

Из системы уравнений (2.12) получим коэффициенты готовности и оперативной готовности:

$$K_{\text{г}c} = p_0 = 1/\left(1 + \sum_{i=1}^{m} (\beta_i \lambda_i t_{\text{н}i}^{\text{з}} + \lambda_i) t_{\text{н}i}^{\text{в}}\right),$$

$$K_{\text{ог}c}(t) = \frac{e^{-\lambda_{\text{c}} t}}{1 + \sum_{i=1}^{m} \left(\beta_i \lambda_i t_{\text{н}i}^{\text{з}} + \lambda_i\right) t_{\text{н}i}^{\text{в}}},$$

где

$$t_{\text{н}i}^{\text{в}} = \int_0^{\infty} [1 - F_{\text{в}} i(t)] dt, \quad t_{\text{н}i}^{\text{з}} = \int_0^{\infty} [1 - F_{\text{з}} i(t)] dt, \quad i = 1, \dots, m.$$

Среднее время восстановления системы определяется по формуле

$$\boldsymbol{t}_{\text{нс}}^{\text{в}} = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{m}} (\boldsymbol{\beta_i \lambda_i t_{\text{н}i}^{\text{з}}} + \boldsymbol{\lambda_i}) \boldsymbol{t_{\text{н}i}^{\text{в}}} / \boldsymbol{\lambda}_{\text{с}}.$$

Надежностная чувствительность системы характеризует влияние малых вариаций параметров элементов на показатели надежности системы $P_c(t)$, $t_{\text{н}}^{c}$. Количественной мерой чувствительности системы по параметру элемента являются функции и коэффициенты чувствительности:

$$\frac{\partial P_c}{\partial c_i}, \quad \frac{\partial t_{\text{н}}^{c}}{\partial c_i}, \quad i = 1,2, \dots,$$

где c_i – показатель (параметр) надежности i-го элемента. Как правило, c_i – это интенсивность отказов $\lambda_i(t)$ или λ_i для экспоненциального распределения наработки на отказ, реже – функция надежности элемента $P_i(t)$.

Надежностные чувствительности применяются при синтезе технических систем с заданным или экстремальным показателем надежности. Они также позволяют определить наиболее (наименее) чувствительные характеристики надежности системы и момент времени, для которого общесистемные показатели имеют экстремальное значение.

Функция чувствительности показателя надежности системы $P_c(t)$ по интенсивностям отказов элементов $\lambda_i, i = 1, \dots, m$ (в случае экспоненциального распределения):

$$V_i^P(t) = \frac{\partial P_c}{\partial \lambda_i}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Коэффициент чувствительности системного показателя $t_{\text{н}}^c$ по интенсивностям отказов элементов $\lambda_i, i = 1, \dots, m$:

$$V_i^t = \frac{\partial t_{\text{н}}^c}{\partial \lambda_i}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Функции (коэффициенты) чувствительности V_i^P, V_i^t являются размерными величинами, что затрудняет сравнение чувствительностей разнородных систем. На практике в основном используют безразмерные чувствительности. Безразмерные или логарифмические функции (коэффициенты) чувствительности имеют вид

$$\psi_i^P(t) = \frac{\partial P_c / P_c}{\partial \lambda_i / \lambda_i} = \frac{\partial(\ln P_c)}{\partial(\ln \lambda_i)}, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\psi_i^t = \frac{\partial t_{\text{н}}^c / t_{\text{н}}^c}{\partial \lambda_i / \lambda_i} = \frac{\partial(\ln t_{\text{н}}^c)}{\partial(\ln \lambda_i)}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Взаимосвязь размерных и безразмерных чувствительностей следующая:

$$\psi_i^P(t) = V_i^P(t) \cdot \frac{\lambda_i}{P_c(t)}, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\psi_i^t = V_i^t \cdot \frac{\lambda_i}{t_{\text{н}}^c}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Для многих систем с неравнонадежными элементами производные представляют собой сложные дробно-рациональные функции, которые сложно использовать для анализа и синтеза. В этом случае чувствительности проще найти по следующим приближенным формулам:

$$V_i^P \approx \frac{P_c(t, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) - P_c(t, \lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_i + \Delta\lambda, \dots, \lambda_m)}{\Delta\lambda_i},$$

$$V_i^t \approx \frac{t_{\text{н}}^c(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) - t_{\text{н}}^c(\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_i + \Delta\lambda, \dots, \lambda_m)}{\Delta\lambda_i}, \quad i = 1, \dots, m,$$

где $\Delta\lambda_i$ – малые приращения λ_i.

Рассмотрим безызбыточную систему, состоящую из m элементов (структурная надежностная схема представлена на рис. 2.1), характеристики надежности которых $\lambda_i, P_i(t), i = 1, \dots, m$. Ее системные показатели надежности имеют вид

$$P_c(t) = \prod_{i=1}^{m} P_i(t) = e^{-\sum_{i=1}^{m} \lambda_i t}, \quad t_{\text{н}}^c = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i}.$$

Функция чувствительности $P_c(t)$ по параметру λ_i при произвольном *t*:

$$V_i^P(t) = \frac{\partial P_c(t)}{\partial \lambda_i} = -t \cdot e^{-\sum_{i=1}^{m} \lambda_i t} = -t \cdot P_c(t), \quad i = 1, \dots, m.$$

Коэффициент чувствительности системного показателя $t_{\text{н}}^c$ по параметру λ_i:

$$V_i^t = \frac{\partial t_{\text{н}}^c}{\partial \lambda_i} = -\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\right)^2} - (t_{\text{н}}^c)^2, \quad i = 1, \dots, m.$$

Следовательно, для безызбыточной системы размерные чувствительности не зависят от номера элемента, а зависят только от значений интенсивностей отказов элементов $\lambda_i, i = 1, \dots, m$.

Безразмерная функция чувствительности $P_c(t)$ по параметру λ_i имеет вид

$$\psi_i^P(t) = V_i^P(t) \cdot \frac{\lambda_i}{P_c(t)} = -t \cdot P_c(t) \cdot \frac{\lambda_i}{P_c(t)} = -t \cdot \lambda_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Безразмерный коэффициент чувствительности системного показателя $t_{\text{н}}^c$ по параметру λ_i находится по формуле

$$\psi_i^t = V_i^t \cdot \frac{\lambda_i}{t_{\text{н}}^c} = -(t_{\text{н}}^c)^2 \cdot \frac{\lambda_i}{t_{\text{н}}^c} = -\lambda_i \cdot t_{\text{н}}^c, \quad i = 1, \dots, m.$$

Из полученных формул видно, что для нерезервированной системы безразмерные чувствительности, в отличие от размерных чувствительностей, зависят от номера элемента.

При исследовании надежности нерезервированных систем возникают две типовые задачи:

1. По заданным явно или косвенно показателям надежности всех элементов нерезервированной системы необходимо определить показатели надежности системы.

2. По заданным явно или косвенно желаемым показателям надежности конструируемой технической системы и некоторым дополнительным условиям или требованиям, например стоимость, сложность и т. д., необходимо определить показатели надежности используемых элементов и (или) их количество.

Рекомендуемый порядок решения задачи первого типа:

1. Проанализировать описание задачи, в результате чего выявить условия для определения показателей надежности всех m элементов.

2. Преобразовать разнородные показатели надежности к одному виду, например $P_j(t)$ или $\lambda_j(t), j = 1, \dots, m$.

3. Записать формулу для $P_c(t)$.

4. Вычислить $P_c(t)$ или другие показатели надежности.

Пример 1 задачи первого типа. Осветительная система состоит из двух последовательно включенных электроламп с показателями $\lambda_1 = 0{,}0025$ ч$^{-1}$, $t_{\gamma 2} = 30$ ч при $P_{\gamma 2} = 0{,}8$. Определить среднюю наработку до отказа системы и вероятность ее отказа в момент времени 100 ч.

Решение. Структурная и надежностная схемы осветительной системы представлены на рис. 2.7 и 2.8.

Из условия задачи следует, что первый элемент имеет экспоненциальное распределение, а для второго элемента вид функции $P_2(t)$ не указан. Допуская однородность электроламп, т. е. $P_2(t) = e^{-\lambda^2 t}$, получим

$$P_2\left(t_{\gamma 2}\right) = P_2(30) = e^{-\lambda_2 30} = P_{\gamma 2} = 0{,}8.$$

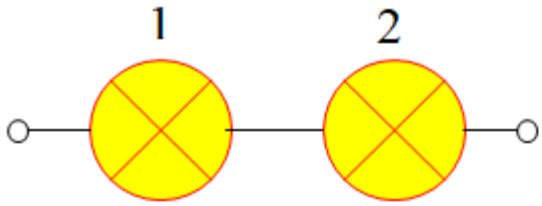

Рис. 2.7. Структурная схема системы

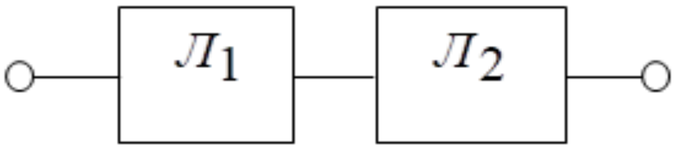

Рис. 2.8. Надежностная схема системы

Следовательно, интенсивность отказов второй электролампы:

$$\lambda_2 = -\frac{\ln 0,8}{30} \approx 0{,}007438\,\text{ч}^{-1}.$$

Функция надежности системы:

$$P_c(t) = P_1(t) \cdot P_2(t) = e^{-(\lambda^1+\lambda^2)t} = e^{-\lambda_c t},$$

где интенсивность отказов осветительной системы

$$\lambda_c = \lambda_1 + \lambda_2 = 0{,}0025 + 0{,}007438 = 0{,}009938\,\text{ч}^{-1}.$$

Средняя наработка до отказа системы:

$$t_{\text{н}}^{c} = \frac{1}{\lambda_c} = \frac{1}{0{,}009938} \approx 100{,}62\,\text{ч}.$$

Вероятность отказа системы в момент времени 100 ч:

$$Q_c(100) = 1 - P_c(100) = 1 - e^{-\lambda_c \cdot 100} = 1 - e^{-0{,}009938 \cdot 100} \approx 0{,}63.$$

Пример 2 задачи первого типа. В техническом элементе возможны внезапные отказы, вызванные скрытыми дефектами его изготовления, а также постепенные отказы, обусловленные протекающими в нем процессами старения и износа. Внезапные отказы распределены по экспоненциальному закону с параметром $\lambda_1 = 0{,}0001$ ч$^{-1}$, а постепенные отказы подчиняются нормальному закону с параметрами $t_{н2} = 1000$ ч, $\sigma_2 = 100$ ч. Определить вероятность безотказной работы элемента и интенсивность его отказов на интервале времени от 200 до 1200 ч. Проанализировать полученные результаты.

Решение. Для расчета показателей надежности изделия, в котором наблюдаются два процесса, один из которых приводит к внезапным отказам, а другой – к постепенным, можно использовать формулы для характеристик надежности нерезервированной системы с двумя элементами.

Следовательно,

$$P(t) = P_1(t) \cdot P_2(t), \quad \lambda(t) = \lambda_1(t) + \lambda_2(t).$$

Для экспоненциального закона справедливо

$$P_1(t) = e^{-\lambda^1 t} = e^{-0{,}0001t}, \quad \lambda_1(t) = \lambda_1 = 0{,}0001 = const.$$

Для нормального закона получим

$$P_2(t) = F_0\left(\frac{t_{н2} - t}{\sigma^2}\right) = F_0\left(\frac{1000 - t}{100}\right),$$

$$f_2(t) = \frac{1}{\sigma^2}\varphi_0\left(\frac{t - t_{н2}}{\sigma^2}\right) = 0{,}01 \cdot \varphi_0\left(\frac{t - 1000}{100}\right),$$

где

$$\varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}, \quad F_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-\tau^2/2}d\tau = \int_{-\infty}^{t}\varphi_0(\tau)d\tau,$$

$$\lambda_2(t) = \frac{f_2(t)}{P(t)} = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \varphi_0\left(\frac{t - t_{н2}}{\sigma_2}\right) = \frac{0{,}01 \cdot \varphi_0\left(\frac{t-1000}{100}\right)}{F_0\left(\frac{1000-t}{100}\right)}.$$

При совместном рассмотрении внезапных и постепенных отказов получим показатели надежности элемента:

$$P(t) = e^{-0{,}0001t} \cdot F_0\left(\frac{1000-t}{100}\right),$$

$$\lambda(t) = 0{,}0001 + \frac{0{,}01 \cdot \varphi_0\left(\frac{t-1000}{100}\right)}{F_0\left(\frac{1000-t}{100}\right)}.$$

Табулированные значения функций $\varphi_0(t)$ и $F_0(t)$ приведены в прил. 4 и 5. Результаты расчета показателей надежности элемента с отказами двух типов представлены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Результаты расчета показателей надежности элемента

t, ч	$\lambda(t)$, ч$^{-1}$	$P(t)$
200	0,0001	0,98
400	0,000	0,96
600	0,0001	0,94
800	0,0006	0,89
1000	0,0081	0,452
1200	0,0231	0,02

Как видно из табл. 2.1, при $t \leq 600$ ч $\lambda(t) \approx \lambda_1$, т. е. внезапные отказы имеют определяющее значение. Затем сказывается влияние и постепенных отказов, интенсивность отказов возрастает. Вероятность безотказной работы элемента при $t \leq 600$ ч медленно убывает, а потом все быстрее.

Рекомендуемый порядок решения задачи второго типа:

1. Проанализировать описание задачи, в результате чего выявить, достаточно ли дополнительных условий для определения всех неизвестных величин; принять допущения о виде распределений,

равнонадежности элементов, пропорциональной зависимости стоимости элемента от $t_н$ и т. д.

2. Выбрать метод решения задачи:

– определение количества равнонадежных элементов m и показателей надежности элементов непосредственно по приведенным ранее формулам;

– определение количества неравнонадежных элементов m и показателей надежности элементов путем последовательного подбора неизвестных и сравнения полученных значений показателей надежности системы с желаемыми.

3. Выполнить необходимые расчеты в соответствии с выбранным методом.

Пример задачи второго типа. Конструируемая осветительная система состоит из ряда последовательно включенных электроламп с интенсивностью отказов $\lambda = 0{,}0015$ ч$^{-1}$. Система должна обладать гамма-ресурсом $t_{\gamma с}$ не более 50 ч при $P_{\gamma с} = 0{,}7$ и быть минимально сложной.

Решение. Структурная и надежностная схемы конструируемой осветительной системы представлены на рис. 2.9 и 2.10.

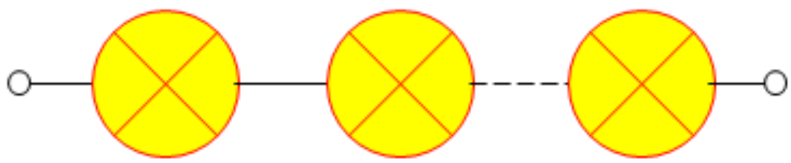

Рис. 2.9. Структурная схема системы

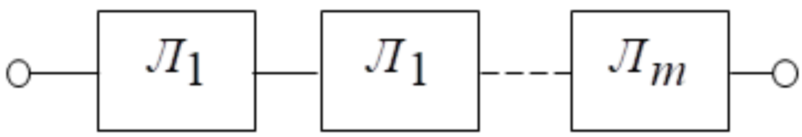

Рис. 2.10. Надежностная схема системы

Из постановки задачи следует, что используемые лампы равнонадежны и их показатели описываются экспоненциальным распределением. Следовательно, для самой системы также справедливо экспоненциальное распределение с пока неизвестной интенсивностью отказов $\lambda_c = m\lambda = 0{,}0015m$, где m – минимально возможное число электроламп.

Так как элементы системы равнонадежные, то неизвестное количество электроламп m определяется из формулы

$$P_c(t) = \prod_{j=1}^{m} P_j(t) = e^{-m\lambda t} = e^{-\lambda_c t}.$$

Желаемую интенсивность отказов системы $\lambda_c^{ж}$ определяем из уравнения

$$P_c(t_{\gamma c}) = P_c(50) = e^{-\lambda_c^{ж}\cdot 50} = P_{\gamma c} = 0{,}7.$$

Следовательно, $\lambda_c^{ж} \approx 0{,}0071335$ ч$^{-1}$. Количество последовательно включенных электроламп в осветительной системе:

$$m = \left[\frac{\lambda_{сж}}{0{,}0015}\right] = 5,$$

где [ ] – округление до ближайшего большего целого числа.

2.2. Задачи по теме «Определение показателей надежности нерезервированных систем»

Задача 1. Три последовательно включенных каскада усиления, из которых состоит усилитель напряжения, имеют следующие показатели надежности: интенсивности отказов λ_1 = 0,001 ч$^{-1}$, λ_2 = 0,003 ч$^{-1}$ и $P(t_{h3})$ = 0,3, где t_{h3} = 100 ч. Определить среднюю наработку до отказа и гамма-ресурс усилителя при $P_{\gamma c}$ = 0,8.

Задача 2. Передаточная функция регулятора имеет следующий вид:

$$W(p) = C_1 + \frac{C_0}{p} + C_2 p,$$

где C_2, C_1, C_0 – параметры настройки регулятора. Регулятор состоит из усилителя с интенсивностью отказов $\lambda_у$ = 0,0022 ч$^{-1}$, интегратора с $t_{\gamma и}$ = 160 ч при $P_{\gamma и}$ = 0,8, дифференциатора с $t_{нд}$ = 1050 ч и сумматора с $P_\Sigma(70)$ = 0,9. Структурная схема регулятора представлена на рис. 2.11.

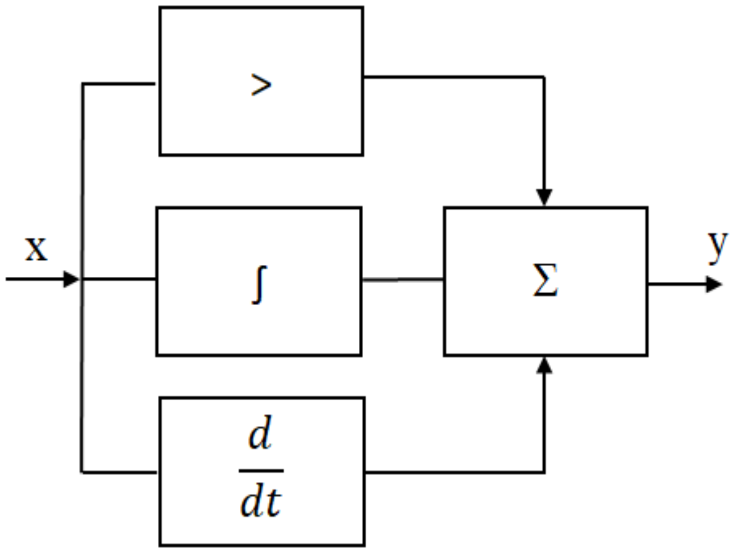

Рис. 2.11. Структурная схема регулятора

Необходимо построить структурную надежностную схему регулятора, определить закон регулирования и плотность вероятности отказа регулятора при $t = 250$ ч.

Задача 3. Осветительная система состоит из четырех последовательно включенных электроламп Л$_1$–Л$_4$ с номинальными интенсивностями отказов $\lambda_1 = 0{,}035$ ч$^{-1}$, $\lambda_2 = 0{,}007$ ч$^{-1}$, $\lambda_3 = 0{,}021$ ч$^{-1}$, $\lambda_4 = 0{,}015$ ч$^{-1}$. Любую лампу можно заменить на другую, интенсивность отказов которой отличается от номинальной на величину $\Delta\lambda = 0{,}00014$. Определить номинальную среднюю наработку до отказа системы, коэффициент чувствительности $t_н^c$ к вариациям λ_3, а также лампу, которая сильнее всего влияет на $t_н^c$.

Задача 4. Система автоматического регулирования состоит из шести элементов: регулятора, датчика, задатчика, элемента сравнения, исполнительного механизма, регулирующего органа (рис. 2.12), интенсивности отказов которых соответственно равны: $\lambda_Д = 0{,}003$ ч$^{-1}$, $\lambda_З = 0{,}0015$ ч$^{-1}$, $\lambda_{ЭС} = 0{,}00075$ ч$^{-1}$, $\lambda_Р = 0{,}006$ ч$^{-1}$, $\lambda_{ИМ} = 0{,}009$ ч$^{-1}$, $\lambda_{РО} = 0{,}015$ ч$^{-1}$.

Определить среднюю наработку до отказа системы, вероятность отказа системы в момент времени $t_h = 50$ ч, а также размерные и безразмерные функции и коэффициенты чувствительности $P_c(t)$ и $t_н^c$ к вариациям $\lambda_Р$.

Задача 5. В автоматической системе регулирования, приведенной в задаче 4, разрешено интенсивность отказа любого одного элемента изменить в два раза с целью увеличения средней наработки до отказа системы. Какой элемент необходимо выбрать и какова средняя наработка до отказа модернизированной АСР?

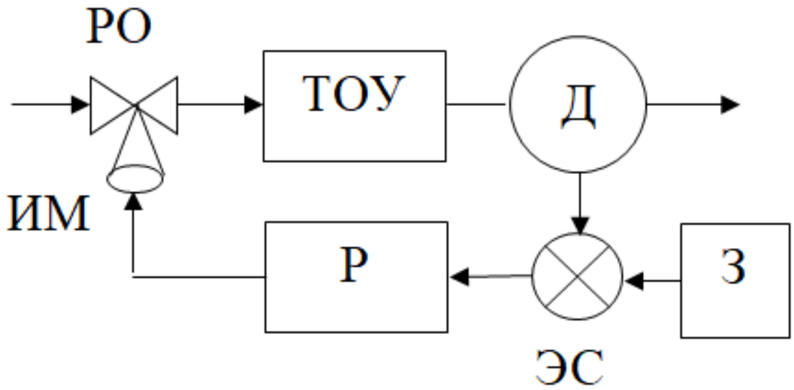

Рис. 2.12. Структурная схема АСР: Д – датчик; З – задатчик; ЭС – элемент сравнения; Р – регулятор; ИМ – исполнительный механизм; РО – регулирующий орган

Задача 6. Конструируемая автоматизированная система обработки информации состоит из нескольких последовательно включенных блоков с интенсивностью отказов λ = 0,001 ч$^{-1}$. Система должна обладать гамма-ресурсом не более 100 ч при $P_{\gamma c}$ = 0,8 и быть минимально сложной. Определить структуру системы.

Задача 7. В системе 12500 элементов, средняя интенсивность отказов которых равна $\lambda_{ср}$ = 0,003 ч$^{-1}$. Требуется определить функцию надежности и вероятность отказа системы, плотность вероятности отказа для t = 250 ч и среднее время безотказной работы системы.

Задача 8. Канал связи состоит из приемника и передатчика. Вероятности безотказной работы каждого из них в течение времени t = 100 ч соответственно равны $P_1(100)$ = 0,95, $P_2(100)$ = 0,97. Для приемника и передатчика справедлив экспоненциальный закон надежности. Необходимо определить среднее время безотказной работы канала связи.

Задача 9. Функция надежности одного элемента нерезервированной системы в течение времени t равна $P(t)$ = 0,9997. Требуется определить вероятность безотказной работы системы, состоящей из ста таких элементов.

Задача 10. Вероятность безотказной работы системы в течение времени t равна $P_c(t)$ = 0,95. В системе 120 равнонадежных элементов. Необходимо найти вероятность безотказной работы одного элемента.

Задача 11. Прибор состоит из пяти узлов, вероятности безотказной работы которых в течение времени t следующие: $P_1(t) = 0{,}98$, $P_2(t) = 0{,}9$, $P_3(t) = 0{,}998$, $P_4(t) = 0{,}975$, $P_5(t) = 0{,}985$. Необходимо определить вероятность безотказной работы прибора, а также вероятность его отказа при $t = 1200$ ч.

Примечание. Поскольку вероятности безотказной работы узлов близки к единице, то в данном случае удобнее использовать приближенную формулу

$$P_c(t) = \prod_{j=1}^{5} P_j(t) \approx 1 - \sum_{j=1}^{5} Q_j(t),$$

где $Q_j(t)$ – вероятность отказа j-го узла.

Задача 12. Приемник состоит из трех блоков: УВЧ, УПЧ, УНЧ. Вероятности безотказной работы в течение времени t каждого из них равны $P_1(t) = 0{,}9$, $P_2(t) = 0{,}7$, $P_3(t) = 0{,}8$. Необходимо определить вероятность отказа приемника вследствие того, что: 1) отказал блок УВЧ; 2) отказал блок УПЧ; 3) отказали блоки УВЧ и УНЧ; 4) отказали все три блока.

Задача 13. Приемное устройство состоит из кодера и модулятора, средняя наработка на отказ которых равна $t_{\text{н}1} = 25000$ ч и $t_{\text{н}2} = 30000$ ч. Необходимо определить вероятность того, что за время $t = 15000$ ч оба элемента окажутся неработоспособны, и наоборот, кодер и модулятор работоспособны.

Задача 14. Электрическая цепь состоит из трех последовательно включенных элементов. Увеличение напряжения в два раза может привести к обрыву электрической цепи вследствие отказа одного из трех элементов с вероятностями $Q_1 = 0{,}4$, $Q_2 = 0{,}5$, $Q_3 = 0{,}6$. Требуется определить вероятность отсутствия отказа типа «обрыв» электрической цепи при увеличении напряжения. Как изменится искомая вероятность, если в цепи будут отсутствовать первый или второй, или третий элементы?

Задача 15. Система состоит из 1000 элементов, отказ каждого из которых приводит к отказу системы. Средняя интенсивность отказов элементов равна 0,00002 ч^{-1}. Необходимо определить среднюю наработку до отказа и вероятность отказа системы в течение 200 ч.

Задача 16. Предполагается, что количество элементов проектируемой системы должно быть не более 2000. Необходимо определить, может ли быть спроектирована система, для которой средняя наработка на отказ составляет 200 ч.

Задача 17. Проектируемая безызбыточная техническая система состоит из нескольких блоков, интенсивность отказов которых $\lambda = 0{,}00002$ ч$^{-1}$. Вероятность безотказной работы системы в течение 500 ч равна $P_c(500) = 0{,}9$. Определить максимально возможное количество блоков в проектируемой системе.

Задача 18. Вероятность отказа нерезервированного устройства, состоящего из четырех равнонадежных элементов, за t = 1000 ч $Q_c(1000)$ = 0,4. Во сколько раз необходимо изменить интенсивность отказов элемента, чтобы снизить вероятность отказа устройства в два раза.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В пособии, предназначенном для студентов, обучающихся по направлениям подготовки «Автоматизация технологических процессов и производств», «Информатика и вычислительная техника», «Управление в технических системах», рассмотрены теоретические основы теории надежности и их практическое применение. Приведены основные понятия теории надежности, показатели надежности технических элементов, законы распределения, используемые в моделях безотказности и восстанавливаемости, основные расчетные формулы для системных показателей надежности, методика решения типовых задач по надежности нерезервированных систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреев, А. В. Теоретические основы надежности технических систем: учебное пособие / А. В. Андреев, В. В. Яковлев, Т. Ю. Короткая. – Санкт-Петербург: Изд-во Политехнического университета, 2018. – 164 с.

2. Балакирев, В. С. Надежность систем автоматизации: учебное пособие / В. С. Балакирев. – Саратов: Саратовский государственный университет, 2005. – 149 с.

3. ГОСТ Р 27.102-2021. Надежность в технике. Надежность объекта. Термины и определения [Электронный ресурс]. – URL: https://rosgosts.ru/21/020/gost_r_27.102-2021 (дата обращения: 15.12.2024).

4. Долгин, В. П. Надежность технических систем: учебное пособие / В. П. Долгин, А. О. Харченко. – Москва: Вузовский учебник : ИНФРА-М, 2023. – 167 с.

5. Мещерякова, А. А. Диагностика и надежность автоматизированных систем: учебное пособие / А. А. Мещерякова, Д. А. Глухов. – Воронеж: ВГЛТУ им. Г. Ф. Морозова, 2016. – 124 с.

6. Никитин, О. Р. Методы измерения статистических параметров радиосигналов: учебное пособие / О. Р. Никитин, Н. Н. Корнеева. – Владимир: Издательство ВлГУ, 2020. – 227 с.

7. Озеркин, Д. В. Теоретические основы конструирования и надежности радиоэлектронных средств / Д. В. Озеркин. – Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2022. – 31 с.

8. Острейковский, В. А. Теория надежности: учебник для вузов / В. А. Острейковский. – Москва: Высшая школа, 2003. – 463 с.

9. Павлов, П. П. Основы теории надежности электромеханических комплексов: учебное пособие / П. П. Павлов, Р. С. Литвиненко. – Казань: КГЭУ, 2017. – 92 с.

10. Рыков, В. В. Надежность технических систем и техногенный риск: учебное пособие / В. В. Рыков, В. Ю. Иткин. – Москва: ИНФРА-М, 2016. – 192 с.

11. Тетеревков, И. В. Надежность систем автоматизации: учебное пособие / И. В. Тетеревков. – Москва; Вологда: Инфра-Инженерия, 2019. – 356 с.

12. Хазин, М. Л. Надежность, оптимизация и диагностика автоматизированных систем: учебник / М. Л. Хазин. – Москва; Вологда: Инфра-Инженерия, 2022. – 248 с.

13. Черкесов, Г. Н. Надежность аппаратно-программных комплексов: учебное пособие / Г. Н. Черкесов. – Санкт-Петербург: Питер, 2005. – 479 с.

14. Шубин, В. С. Надежность оборудования химических и нефтеперерабатывающих производств / В. С. Шубин, Ю. А. Рюмин. – Москва: Химия : КолосС, 2006. – 359 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Значения гамма-функции

x	*Г(x)*	*x*	*Г(x)*	*x*	*Г(x)*	*x*	*Г(x)*
1,00	1,00000	1,25	0,90640	1,50	0,88623	1,75	0,91906
1,01	0,99433	1,26	0,90440	1,51	0,88659	1,76	0,92137
1,02	0,98884	1,27	0,90250	1,52	0,88704	1,77	0,92376
1,03	0,98355	1,28	0,90072	1,53	0,88757	1,78	0,92623
1,04	0,97844	1,29	0,89904	1,54	0,88818	1,79	0,92877
1,05	0,97350	1,30	0,89747	1,55	0,88887	1,80	0,93188
1,06	0,96874	1,31	0,8960	1,56	0,88964	1,81	0,93408
1,07	0,96415	1,32	0,89464	1,57	0,89049	1,82	0,93685
1,08	0,95973	1,33	0,89338	1,58	0,89142	1,83	0,93369
1,09	0,95546	1,34	0,89222	1,59	0,89243	1,84	0,94261
1,10	0,95135	1,35	0,89115	1,60	0,89352	1,85	0,94561
1,11	0,94740	1,36	0,89018	1,61	0,89468	1,86	0,94869
1,12	0,94359	1,37	0,88931	1,62	0,89592	1,87	0,95184
1,13	0,93993	1,38	0,88854	1,63	0,89724	1,88	0,95507
1,14	0,93642	1,39	0,88785	1,64	0,89864	1,89	0,95838
1,15	0,93304	1,40	0,88726	1,65	0,90012	1,90	0,96177
1,16	0,92980	1,41	0,88676	1,66	0,90167	1,91	0,96523
1,17	0,92670	1,42	0,88636	1,67	0,90330	1,92	0,96877
1,18	0,92373	1,43	0,88604	1,68	0,90500	1,93	0,96240
1,19	0,92089	1,44	0,88581	1,69	0,90678	1,94	0,97610
1,20	0,91817	1,45	0,88566	1,70	0,90864	1,95	0,97988
1,21	0,91558	1,46	0,88560	1,71	0,91057	1,96	0,98374
1,22	0,91311	1,47	0,88563	1,72	0,91258	1,97	0,98768
1,23	0,91075	1,48	0,88575	1,73	0,91467	1,98	0,99171
1,24	0,90852	1,49	0,88595	1,74	0,91683	1,99	0,99581
						2,00	1,00000

Приложение 2

Значения распределения χ^2 в зависимости от *f* и *P*

f	*P*													
	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,000	0,001	0,004	0,016	0,064	0,148	0,455	1,074	1,642	2,71	3,84	5,41	6,64	10,83
2	0,020	0,040	0,102	0,211	0,446	0,713	1,386	2,41	3,22	4,60	5,99	7,82	9,21	13,83
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,37	3,66	4,64	6,25	7,82	9,84	11,34	16,27
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	2,20	3,36	4,88	5,99	7,78	9,49	11,67	13,28	18,46
5	0,554	0,752	1,145	1,61	2,34	3,00	4,35	6,06	7,29	9,24	11,07	13,39	15,09	20,50
6	0,872	1,134	1,635	2,20	3,07	3,83	5,35	7,23	8,56	10,64	12,59	15,03	16,81	22,50
7	1,239	1,564	2,17	2,83	3,82	4,67	6,35	8,38	9,80	12,02	14,07	16,62	18,48	24,30
8	1,646	2,03	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34	9,52	11,03	13,36	15,51	18,17	20,10	26,10
9	2,09	2,53	3,32	4,17	5,38	6,39	8,34	10,66	12,24	14,68	16,92	19,68	21,70	27,90
10	2,56	3,00	3,94	4,86	6,18	7,27	9,34	11,78	13,44	15,99	18,31	21,20	23,20	29,60
11	3,06	3,61	4,58	5,58	6,99	8,15	10,34	12,90	14,63	17,28	19,68	22,60	24,70	31,30
12	3,57	4,18	5,23	6,13	7,81	9,02	11,34	14,01	15,81	18,55	21,00	24,10	26,20	32,90

Приложение 3

Значения критерия Колмогорова

λ	$P(\lambda)$
0,0	1,000
0,1	1,000
0,2	1,000
0,3	1,000
0,4	0,997
0,5	0,964
0,6	0,864
0,7	0,711
0,8	0,544
0,9	0,393
1,0	0,270
1,1	0,178
1,2	0,112
1,3	0,068
1,4	0,040
1,5	0,022
1,6	0,012
1,7	0,006
1,8	0,003
1,9	0,002
2,0	0,001
2,1	0,000

Приложение 4

Значения функции $F_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{-\tau^2}{2}} d\tau$

t	до значащих цифр	значащие цифры t									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	0,	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	0,	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	0,	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	0,	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	0,	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	0,	7251	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	0,	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	0,	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0,9	0,	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	0,	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	0,	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	0,	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8963	8980	8997	9015
1,3	0,9	0320	0490	0658	0824	0988	1149	1308	1466	1621	1774
1,4	0,9	1924	2073	2220	2364	2507	2647	2785	2922	3056	3189
1,5	0,9	3319	3448	3574	3699	3822	3943	4062	4179	4295	4408
1,6	0,9	4520	4630	4738	4845	4950	5053	5154	5254	5352	5449
1,7	0,9	5543	5637	5728	5818	5907	5994	6080	6164	6246	6327
1,8	0,9	6407	6485	6562	6637	6712	6784	6856	6926	6995	7062
1,9	0,9	7128	7193	7257	7320	7381	7441	7500	7558	7615	7670
2,0	0,9	7725	7778	7831	7882	7932	7982	8080	8077	8124	8169

2,1	0,9	8214	8257	8300	8341	8382	8422	8461	7500	8537	8574
2,2	0,9	8610	8645	8679	8713	8745	8778	8809	8840	8870	8899
2,3	0,9	8928	8956	8983	9010	9036	9061	9086	9111	9134	9158
2,4	0,99	1802	2024	2240	2451	2656	2854	3053	3244	3431	3611
2,5	0,99	3790	3963	4132	4297	4457	4614	4766	4915	5060	5201
2,6	0,99	5339	5473	5603	5731	5855	5975	6093	6207	6319	6427
2,7	0,99	6533	6636	6736	6838	6928	7020	7110	7197	7282	7365
2,8	0,99	7445	7523	7599	7673	7744	7814	7882	7948	8012	8074
2,9	0,99	8134	8193	8250	8305	8359	8411	8462	8511	8559	8605
3,0	0,99	8650	8694	8736	8777	8817	8856	8893	8930	8965	8999
3,1	0,999	0324	0646	0957	1260	1660	1836	2112	2378	2636	2886
3,2	0,999	3129	3363	3590	3810	4010	4230	4429	4623	4810	4991
3,3	0,999	5166	5335	5499	5658	5811	5959	6103	6242	6346	6506
3,4	0,999	6631	6752	6869	6982	7091	7197	7299	7398	7493	7585
3,5	0,999	7674	7760	7842	7922	7999	8074	8146	8215	8282	8347
3,6	0,999	8409	8469	8527	8583	8637	8689	8739	8787	8834	8879
3,7	0,999	8922	8964	9004	9043	9080	9116	9150	9184	9216	9247
3,8	0,9999	2765	3052	3327	3593	3848	4094	4331	4558	4777	4988
3,9	0,9999	5190	5385	5573	5753	5926	6092	6252	6406	6554	6696
4,0	0,9999	6833	6964	7090	7211	7327	7439	7546	7649	7748	7843
4,1	0,9999	7934	8022	8106	8186	8264	8338	8409	8477	8542	8605
4,2	0,9999	8665	8723	8778	8832	8882	8931	8978	9023	9066	9107
4,3	0,99999	1460	1837	2198	2544	2876	3193	3497	3788	4066	4332
4,4	0,99999	4588	4832	5065	5288	5502	5706	5902	6089	6268	6439
4,5	0,99999	6602	6759	6908	7051	7187	7318	7442	7561	7675	7784
4,6	0,99999	7888	7987	8081	8172	8258	8340	8419	8494	8566	8634
4,7	0,99999	8699	8761	8821	8877	8931	8983	9032	9079	9124	9166
4,8	0,999999	2067	2454	2822	3173	3508	3827	4131	4420	4696	4958

4,9	0,999999	5208	5446	5673	5888	6094	6289	6475	6652	6821	6981
5,0	0,999999	7134	7278	7416	7548	7672	7791	7904	8011	8113	8210
5,1	0,999999	8302	8389	8412	8551	8626	8698	8765	8830	8891	8949
5,2	0,9999999	004	056	105	152	197	240	280	318	354	388
5,3	0,9999999	421	452	481	509	539	560	584	606	628	648
5,4	0,9999999	667	685	702	718	734	748	762	775	787	799
5,5	0,9999999	810	821	831	840	849	857	865	873	880	886
5,6	0,9999999	893	899	905	910	915	920	924	929	933	936
5,7	0,9999999	940	944	947	950	953	955	958	960	963	965
5,8	0,9999999	967	969	971	972	974	975	977	978	979	981
5,9	0,9999999	982	983	984	985	986	987	987	988	989	990
6,0	0,9999999	990	–	–	–	–	–	–	–	–	–

Примечание. Значения функции даны числами после запятой.

Приложение 5

Значения функции $\boldsymbol{\varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{-t^2}{2}}}$

t	до значащих цифр	значащие цифры *t*									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,	3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	0,	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	0,	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	0,	3814	3802	3790	3778	3765	3753	3739	3725	3712	3697
0,4	0,	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	0,	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	0,	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	0,	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	0,	2827	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	0,	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	0,	2179	2155	2131	2107	2089	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	0,	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	0,	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	0,	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	0,	1295	1276	1257	1238	1219	12200	1182	1163	1145	1127
1,6	0,	1109	1096	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0,0	9405	9246	9089	8933	8780	8628	8478	8329	8183	8038
1,8	0,0	7895	7754	7614	7477	7341	7206	7074	6943	6814	6687
1,9	0,0	6562	6438	6316	6195	6077	5959	5844	5730	5618	5508
2,0	0,0	5399	5292	5186	5082	4980	4879	4780	4682	4586	4491
2,1	0,0	4398	4307	4217	4128	4041	3955	3871	3788	3706	3626
2,2	0,0	3547	3470	3394	3319	3246	3174	3103	3034	2965	2898
2,3	0,0	2833	2768	2705	2643	2586	2522	2443	2406	2349	2294
2,4	0,0	2239	2186	2134	2083	2033	1984	1936	1888	1842	1797
2,5	0,0	1753	1709	1667	1625	1585	1545	1506	1468	1431	1394
2,6	0,0	1358	1324	1289	1256	1223	1191	1160	1130	1100	1071
2,7	0,0	1042	1014	0987	0961	0935	0909	0885	0861	0837	0814
2,8	0,00	7915	7996	7483	7274	7071	6873	6679	6491	6307	6127
2,9	0,00	5952	5782	5616	5454	5296	5143	4993	4847	4705	4567
3,0	0,00	4432	4301	4173	4049	3928	3810	3695	3584	3475	3370
3,5	0,00	4432	3267	2384	1723	1232	0873	0612	0425	0292	0199
4,0	0,000	1328	0893	0589	0385	0249	0160	0101	0064	0040	0024
4,5	0,00000	149	0897	0536	0317	0186	0108	0062	0035	0020	0011

Примечание. Значения функции даны числами после запятой.